Mecklenburg-Vorpommern

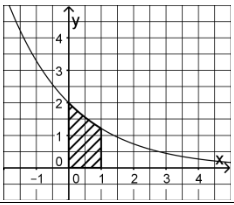
Musterabitur 2022 & 2023

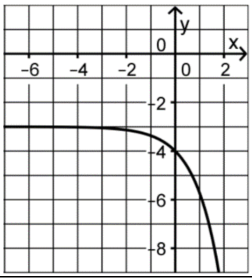
Mathematik (WTR)

Grundkurs

Musterlösung

Teil A

Aufgabe	Pflichtaufgaben	mögliche BE	erteilte BE
1.1	$f(x)=0 \Leftrightarrow x^2\cdot(x+2)=0 \Leftrightarrow x=-2 \vee x=0$	2	
1.2	$\int_{-2}^{0}\left(x^3+2x^2\right)dx=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_{-2}^{0}=\frac{4}{3}$	3	
2.1	$f(0)=2$, $f'(0)=-1$ Damit: $y=-x+2$	2	
2.2	Z. B.  Term: $\int_{0}^{1} f(x)\,dx$	3	
3.1	$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\neq r\cdot\overrightarrow{AC}$ für alle $r\in\mathbb{R}$ $\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix}+s\cdot\overrightarrow{AB}+t\cdot\overrightarrow{AC}$, $s,t\in\mathbb{R}$	3	
3.2	$\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{BD}=0 \Leftrightarrow 3\cdot(d-1)+1\cdot(-1)+1\cdot 5=0 \Leftrightarrow d=-\frac{1}{3}$	2	
4.1	$\left\lvert\overrightarrow{AB}\right\rvert^2=\sqrt{25}^{\,2}=25$	2	
4.2	$\frac{1}{3}\cdot 25\cdot h=50 \quad\Leftrightarrow\quad h=6$ mögliche z-Koordinate: 10	3	
	Summe:	**20**	

Aufgabe	Wahlaufgaben	mögliche BE	erteilte BE
5.1	Der Graph von f ist eine nach unten geöffnete Parabel, die bei $t=0$ und $t=4$ die t-Achse schneidet, d. h. es gilt $f(t)>0$ für $0<t<4$.	3	
5.2	$2+\int_0^t f(x)\,dx=7$	2	
6.1	Graph II Begründung: Graph I schneidet für ein $x\in[-7;-6]$ die x-Achse. Würde Graph I die Ableitungsfunktion darstellen, so müsste Graph II für dieses $x\in[-7;-6]$ einen Extrempunkt haben. Da dies nicht der Fall ist, stellt Graph II die Ableitungsfunktion dar.	2	
6.2	$h(x)=-e^x-3$ 	3	
7.1	$\left\lvert\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}\right\rvert=3$, $\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\6\\6\end{pmatrix}$ Damit: $(-4\mid 6\mid 6)$	2	
7.2	Das Dreieck ABC ist in C rechtwinklig. C liegt also auf dem Thaleskreis über $\overline{AB}$, d. h. der Mittelpunkt $M(0\mid 2\mid 1)$ von $\overline{AB}$ hat von A, B und C den gleichen Abstand. Alle weiteren Punkte mit dieser Eigenschaft liegen auf der Lotgerade zur yz-Ebene durch M, beispielsweise der Punkt $(1\mid 2\mid 1)$.	3	
	Summe:	**5**	

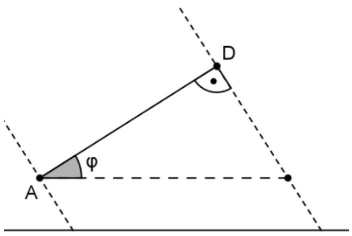
Teil B

Aufgabe	Analysis	mögliche BE	erteilte BE
1.1	Nullstellen: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ Extremstellen: $f'(x) = -e^x\left(x^2 + x - 1\right) = 0$ $\Rightarrow \quad x^2 + x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{3/4} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$	3	
1.2	$m = f'(1) = -e^1\left(1^2 + 1 - 1\right) = -e$ $f(1) = 0$, laut Abbildung. Also $t(x) = e - e \cdot x$.	2	
1.3	Zwischen $x = 0$ und $x = 1$ verläuft der Graph von $f(x)$ oberhalb der x-Achse, die Flächenbilanz ist dort also positiv. Für $x < 0$ verläuft der Graph unterhalb der x-Achse, die Flächenbilanz ist dort also negativ. Von 0 ausgehend nach links gibt es eine Flächenbilanz die betragsmäßig gleich der Flächenbilanz von 0 bis 1 ist. Folglich ist die gesamte Flächenbilanz in diesem Bereich 0.	3	
1.4	Eine Stammfunktion F von f hat dort einen Tiefpunkt, wo f eine Nullstelle hat ($F'(x) = f(x) = 0$) und monoton wachsend ist ($F''(x) = f'(x) > 0$). Das ist laut Abbildung bei $x = 0$ der Fall.	2	
	Summe:	**10**	

Aufgabe	Analysis	mögliche BE	erteilte BE
2.1	♦ $u(x) = v(x) \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{8}x^3 = -\frac{1}{4}x^3 + x^2 \Leftrightarrow \frac{3}{8}x^2 \cdot \left(x - \frac{8}{3}\right) = 0$ $\Leftrightarrow\; x = 0 \vee x = \frac{8}{3}$ $u(0) = 0$, $u\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{64}{27}$ ♦ Mit $v(x) = -\frac{1}{4}x^3 + x^2$ ergibt sich $v'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 2x$.	5	
2.2	$v''(x) = -\frac{3}{2}x + 2$ Es gilt $v'\left(\frac{8}{3}\right) = 0$ und $v''\left(\frac{8}{3}\right) < 0$, d. h. Q ist Hochpunkt des Graphen von v.	3	

2.3	Die Aussage ist falsch. Begründung: Mit $u'(x)=\frac{3}{8}x^2$ ergibt sich $v'(2)=1<\frac{3}{2}=u'(2)$	3	
2.4	Für die y-Koordinate der unteren Spitze der Schwanzflosse ergibt sich $\frac{64}{27}-\frac{539}{216}=-\frac{1}{8}$. Mit $u(x)=-\frac{1}{8}\Leftrightarrow x^3=-1\Leftrightarrow x=-1$ ergibt sich für die Ausdehnung in x-Richtung $1+\frac{8}{3}=\frac{11}{3}$.	5	
2.5	$\int_{-1}^{0}\left(v(x)-u(x)\right)dx=\int_{-1}^{0}\left(x^2-\frac{3}{8}x^3\right)dx$ $=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{32}x^4\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{3}+\frac{3}{32}=\frac{41}{96}$	3	
2.6	Aufgabenstellung: Bestimmen Sie den Flächeninhalt des dunkelgrau markierten Teils des Fischs. Beschreibung: Die Werte der Integrale sind die Inhalte der Flächen, die der Graph von u mit dem Graphen von v sowie den Geraden mit den Gleichungen $x=-1$ und $x=x_1$ bzw. mit der Gerade mit der Gleichung $y=\frac{5}{4}$ sowie den Geraden mit den Gleichungen $x=x_1$ und $x=x_2$ einschließt.	5	
2.7.1	Der Wendepunkt des Graphen von u_k ist $(0\|0)$. Mit $u_k'(x)=\frac{3}{8}k\cdot x^2$ ergibt sich $u_k'(0)=0$.	3	
2.7.2	$u_k(-1)=\frac{5}{4}-\frac{3}{2}\Leftrightarrow -\frac{1}{8}k=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow k=2$	4	
2.7.3	$v'(-1)=-\frac{11}{4}$ $u_k'(-1)=\frac{11}{4}\Leftrightarrow\frac{3}{8}k=\frac{11}{4}\Leftrightarrow k=\frac{22}{3}$ $u_{\frac{22}{3}}\left(\frac{8}{\frac{22}{3}+2}\right)=\frac{198}{343}<\frac{5}{4}$, d. h. die Kopfspitze liegt nicht oberhalb der Wasseroberfläche.	4	
	Summe:	**35**	

Aufgabe	**Analytische Geometrie**	**mögliche BE**	**erteilte BE**
3.1	$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad M(1\|1\|0),\ S(1\|1\|4)$	3	
3.2	Wenn g senkrecht zu E_{BCS} verläuft, dann steht $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ senkrecht auf E_{BCS} und die Koordinatengleichung lautet: $4y + z = d$. Für B gilt: $4 \cdot 2 + 0 = d = 8$. Also: $4y + z = 8$.	2	
3.3	$0 = 2 + t \cdot 1 \rightarrow t = -2 \rightarrow y_P = 1{,}5 - 2 \cdot 4 = -6{,}5$. Diese y-Koordinate liegt aber nicht zwischen den y-Koordinaten von B und D, somit liegt P nicht im Quadrat ABCD.	3	
3.4	Wegen des Strahlensatzes müssen sich auch die z-Koordinaten der Vektoren $\overrightarrow{BQ}$ und $\overrightarrow{QS}$ wie 1:3 verhalten. Mit $z_B = 0$ und $z_S = 4$ folgt somit $z_Q = k = 1$.	2	
	Summe:	**10**	

Aufgabe	Analytische Geometrie	mögliche BE	erteilte BE
4.1	Die z-Koordinaten der Punkte A und B stimmen überein.	2	
4.2	♦ $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$ ♦ $\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC} = 0$	4	
4.3	$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}$, $D(-6 \mid 2 \mid 5)$	1	
4.4	$E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \mu \cdot \overrightarrow{AC}$; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ Das daraus resultierende Gleichungssystem I $x_1 = 2\lambda - 4\mu$ II $x_2 = 6\lambda + 8\mu$ III $x_3 = 1 + 4\mu$ liefert $3x_1 - x_2 + 5x_3 - 5 = 0$.	4	
4.5	Mit $\vec{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ ergibt sich: $\cos\varphi = \frac{\vec{m} \circ \vec{n}}{\lvert\vec{m}\rvert \cdot \lvert\vec{n}\rvert}$, d. h. $\varphi \approx 32{,}3°$ Die Bedingung ist erfüllt.	3	
4.6	$\vec{x} = \overrightarrow{OM} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\sigma \in [-3; 0]$	2	
4.7	Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist der Wert des Produkts der Seitenlängen. Die Gerade AB verläuft parallel zur x_1x_2-Ebene, die Gerade AD nicht.  Damit ist die eine Seite des Rechtecks, das den Schatten im Modell darstellt, genauso lang wie die Strecke $\overline{AB}$, die andere Seite länger als die Strecke $\overline{AD}$.	4	
	Summe:	**20**	