Mecklenburg-Vorpommern

MUSTERABITUR 2022 & 2023

Mathematik

Grundkurs

Prüfungsteil A – hilfsmittelfreie Aufgaben

Name, Vorname: ______________________________

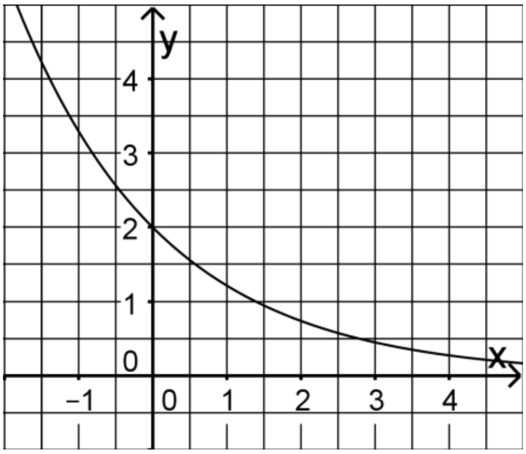
Arbeitsblatt

Dieses Arbeitsblatt ist ohne Zuhilfenahme von Tafelwerk oder Taschenrechner zu bearbeiten. Zusätzliche Lösungsblätter sind mit Ihrem Namen zu versehen und in dieses Arbeitsblatt einzulegen.

Für dieses Arbeitsblatt beträgt die Bearbeitungszeit maximal 90 Minuten.

Zu bearbeiten sind die **vier** Pflichtaufgaben sowie **eine** der drei Wahlaufgaben.

1 Analysis – Pflichtaufgabe	BE
Gegeben ist die in IR definierte Funktion f : $f(x) = x^3 + 2x^2$.	
1.1 Bestätigen Sie, dass $x_1 = -2$ und $x_2 = 0$ die einzigen Nullstellen von f sind.	2
1.2 Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt.	3

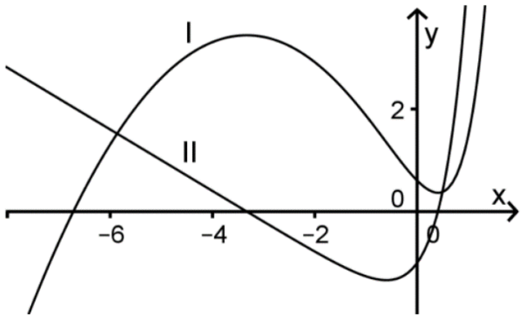
2 Analysis – Pflichtaufgabe	BE
Die Abbildung zeigt den Graphen der in IR definierten Funktion f mit $f(x)=2e^{-\frac{1}{2}x}$. Für die erste Ableitungsfunktion f' von f gilt $f'(x)=-e^{-\frac{1}{2}x}$. 	
2.1 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f in seinem Schnittpunkt mit der y-Achse.	2
2.2 Zeichnen Sie in die Abbildung ein Flächenstück ein, das vom Graphen von f, der x-Achse, der y-Achse sowie einer zur y-Achse parallelen Geraden eingeschlossen wird und dessen Flächeninhalt etwa 1,5 beträgt. Geben Sie einen Term an, mit dem der Inhalt des von Ihnen eingezeichneten Flächenstücks berechnet werden kann.	3

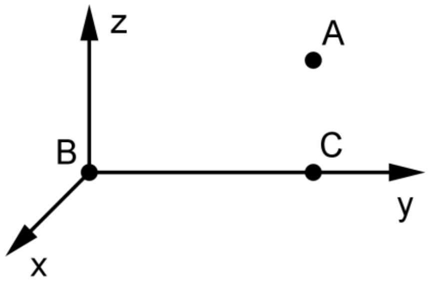
3 **Analytische Geometrie – Pflichtaufgabe**	BE
Gegeben sind die Punkte $A(-2\,\vert\,1\,\vert\,-2)$, $B(1\,\vert\,2\,\vert\,-1)$ und $C(1\,\vert\,1\,\vert\,4)$ sowie für eine reelle Zahl d der Punkt $D(d\,\vert\,1\,\vert\,4)$.	
3.1 Zeigen Sie, dass A, B und C Eckpunkte eines Dreiecks sind, und geben Sie eine Gleichung der Ebene an, in der dieses Dreieck liegt.	3
3.2 Das Dreieck ABD ist im Punkt B rechtwinklig. Ermitteln Sie den Wert von d.	2

4 **Analytische Geometrie – Pflichtaufgabe**	BE
Gegeben ist das Quadrat ABCD mit $A(3\|3\|4)$, $B(6\|7\|4)$, $C(2\|10\|4)$ und $D(-1\|6\|4)$. Das Quadrat liegt in der Ebene mit der Gleichung $z=4$.	
4.1 Weisen Sie nach, dass das Quadrat den Flächeninhalt 25 besitzt.	2
4.2 Es gibt Punkte S, für die die Pyramide ABCDS das Volumen 50 hat. Bestimmen Sie die z-Koordinate eines dieser Punkte.	3

Von den folgenden drei Wahlaufgaben ist **eine** zu bearbeiten.

5 **Analysis – Wahlaufgabe**	BE
Ein Behälter enthält zu Beobachtungsbeginn zwei Liter einer Flüssigkeit. Für die anschließenden fünf Stunden gibt die Funktion f mit $f(t) = -t \cdot (t-4)$ die momentane Zuflussrate der Flüssigkeit in Liter pro Stunde an. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden.	
5.1 Begründen Sie, dass das Volumen der Flüssigkeit im Behälter innerhalb der ersten vier Stunden nach Beobachtungsbeginn durchgehend zunimmt.	3
5.2 Geben Sie eine Gleichung an, mit der berechnet werden kann, wie viele Stunden vom Beobachtungsbeginn an vergehen, bis der Behälter sieben Liter der Flüssigkeit enthält.	2

6	**Analysis – Wahlaufgabe**	BE
6.1	Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion und der zugehörigen Ableitungsfunktion. Entscheiden Sie, welcher der Graphen I und II die Ableitungsfunktion darstellt. Begründen Sie Ihre Entscheidung. 	2
6.2	Eine nicht lineare Funktion h hat keine Nullstelle. Der Graph von h nähert sich für $x \to -\infty$ asymptotisch der Gerade mit der Gleichung $y = -3$. Geben Sie einen Funktionsterm von h an und skizzieren Sie den zugehörigen Graphen.	3

7 Analytische Geometrie – Wahlaufgabe	BE
In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0\|4\|2)$, $B(0\|0\|0)$ und $C(0\|4\|0)$ gegeben (vgl. Abbildung). Eine Gerade g verläuft durch A und hat den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. 	
7.1 Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punkts, der auf g liegt und von A den Abstand 6 hat.	2
7.2 Ermitteln Sie die Koordinaten zweier Punkte, die von A, B und C den gleichen Abstand haben.	3

Mecklenburg-Vorpommern

MUSTERABITUR 2022 & 2023

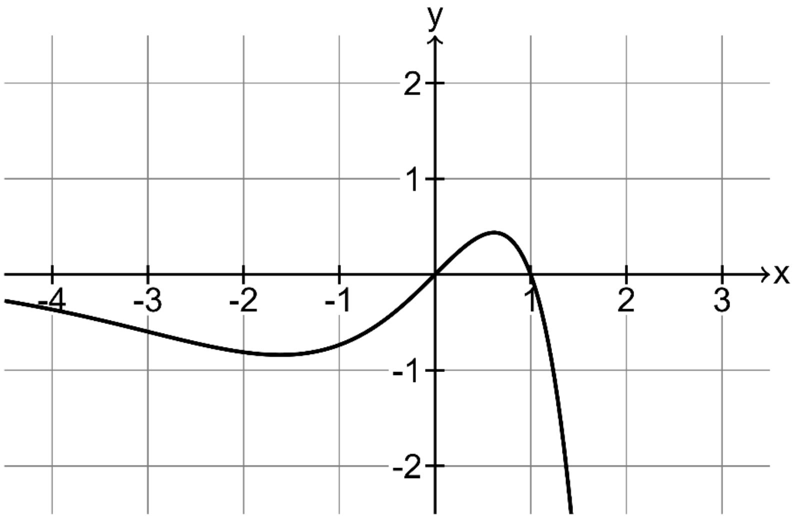
Mathematik (WTR)

Grundkurs

Prüfungsteil B – komplexe Aufgaben

1 Analysis

Die Abbildung 1 zeigt den Graph der Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \left(-x^2 + x\right) \cdot e^x$ und $x \in \mathrm{IR}$.



Für die erste Ableitungsfunktion f' von f gilt $f'(x) = -e^x \cdot \left(x^2 + x - 1\right)$.

1.1 Geben Sie die Nullstellen von f an und berechnen Sie die Extremstellen von f. 3 BE

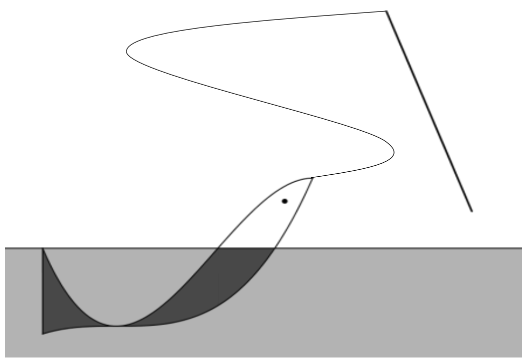
1.2 An den Graphen von f wird im Punkt $P\left(1 \mid f(1)\right)$ die Tangente t gelegt. Ermitteln Sie eine Gleichung von t. 2 BE

1.3 Begründen Sie ohne zu rechnen, dass es eine negative Zahl a gibt, für die gilt: 3 BE

$$\int_a^1 f(x)\,dx = 0$$

1.4 Begründen Sie, dass der Graph jeder Stammfunktion von f einen Tiefpunkt hat. 2 BE

2 Analysis



Die Abbildung zeigt das Logo eines Geschäfts für Anglerbedarf. Die obere Spitze der Schwanzflosse des Fischs liegt auf der Wasseroberfläche; die Strecke zwischen oberer und unterer Spitze der Schwanzflosse steht senkrecht zur Wasseroberfläche.

Bei Verwendung eines geeigneten Koordinatensystems kann die untere Begrenzungslinie des Fischs mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $u(x)=\frac{1}{8}x^3$, die obere Begrenzungslinie mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $v(x)=\frac{1}{4}x^2\cdot(4-x)$ beschrieben und die Wasseroberfläche durch die Gerade mit der Gleichung $y=\frac{5}{4}$ dargestellt werden.

2.1 Zeigen Sie, dass 5 BE

- die Graphen von u und v nur die Punkte $P(0|0)$ und $Q\left(\frac{8}{3}\middle|\frac{64}{27}\right)$ gemeinsam haben;
- $v'(x)=-\frac{3}{4}x^2+2x$ ein Term der ersten Ableitungsfunktion von v ist.

2.2 Weisen Sie nach, dass der Punkt Q ein Extrempunkt des Graphen von v ist, und geben Sie die Art dieses Extrempunkts an. 3 BE

2.3 Beurteilen Sie die folgende Aussage: 3 BE

Für jeden Wert von $x\in\left]0;\frac{8}{3}\right[$ *ist die Steigung des Graphen von v größer als die Steigung des Graphen von u.*

2.4 Die Ausdehnung des Fischs in y-Richtung beträgt $\frac{539}{216}$. Ermitteln Sie damit die Ausdehnung des Fischs in x-Richtung. 5 BE

(zur Kontrolle: Die Ausdehnung in x-Richtung beträgt $\frac{11}{3}$.)

2.5 Berechnen Sie den Flächeninhalt der Schwanzflosse des Fischs. 3 BE

Der Aufgabentext wird auf der folgenden Seite fortgesetzt.

2.6 Bezeichnet man die Lösung der Gleichung $v(x)=\frac{5}{4}$ für $0<x\le\frac{8}{3}$ mit x_1 und die Lösung der Gleichung $u(x)=\frac{5}{4}$ mit x_2, so ist der Wert des Terms 5 BE

$$\int_{-1}^{x_1}\left(v(x)-u(x)\right)dx+\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{5}{4}-u(x)\right)dx$$

die Lösung einer Aufgabe im vorliegenden Sachzusammenhang.

Formulieren Sie eine passende Aufgabenstellung und beschreiben Sie die Bedeutung der beiden Integrale im Zusammenhang mit der Aufgabe.

2.7 Das Logo des Geschäfts soll verändert werden. Für die obere Begrenzungslinie des Fischs wird weiterhin die Funktion v verwendet. Die untere Begrenzungslinie jedoch soll anstelle von u mithilfe einer anderen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $u_k(x)=\frac{1}{8}k\cdot x^3$ mit $k>0$ beschrieben werden. Der gemeinsame Punkt der Graphen von u_k und v, der die x-Koordinate $\frac{8}{k+2}$ hat, stellt die Kopfspitze dar.

2.7.1 Weisen Sie nach, dass die x-Achse für alle Werte von k Tangente an den Graphen von u_k in dessen Wendepunkt ist. 3 BE

2.7.2 Bestimmen Sie, wie der Wert von k gewählt werden müsste, damit die Ausdehnung der Schwanzflosse in y-Richtung $\frac{3}{2}$ beträgt. 4 BE

2.7.3 Die Graphen von u_k und v schließen mit der Strecke zwischen oberer und unterer Spitze der Schwanzflosse jeweils einen Winkel ein. Für einen Wert von k sind die beiden Winkel gleich groß. 4 BE

Prüfen Sie, ob die Kopfspitze für diesen Wert von k oberhalb der Wasseroberfläche liegt.

3 Analytische Geometrie

Gegeben ist eine gerade Pyramide ABCDS mit der quadratischen Grundfläche ABCD und den Eckpunkten $A(2|0|0)$, $B(2|2|0)$, und $D(0|0|0)$. Die Spitze S liegt in der Ebene $z=4$.

Weiterhin ist die Gerade g mit der Gleichung $g: x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in IR$ gegeben.

3.1 Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M der Grundfläche sowie die Koordinaten von S. 3 BE

3.2 Die Punkte B, C und S bestimmen die Ebene E_{BCS}. Die Gerade g verläuft senkrecht zu E_{BCS}. Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E_{BCS}. 2 BE

3.3 Die Gerade g durchstößt die xy-Ebene im Punkt P. Untersuchen Sie, ob P innerhalb der Grundfläche ABCD liegt. 3 BE

3.4 Die Ebene $z=k$ schneidet die Kante BS im Punkt Q. Dabei gilt: 2 BE

$$\frac{\left|\overline{BQ}\right|}{\left|\overline{QS}\right|} = \frac{1}{3}$$

Bestimmen Sie den Wert von k.

4 Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0|0|1)$, $B(2|6|1)$ und $C(-4|8|5)$ gegeben.

4.1 Begründen Sie, dass die Gerade AB parallel zur xy-Ebene verläuft. 2 BE

4.2 Weisen Sie nach, dass 4 BE

- der Punkt $M(-2|4|3)$ der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$ ist;
- das Dreieck ABC bei B einen rechten Winkel hat.

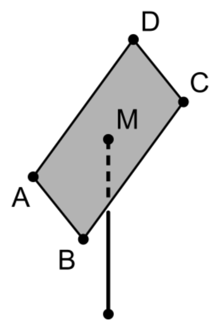
4.3 Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts D, für den das Viereck ABCD ein Rechteck ist. 1 BE

4.4 Das Rechteck ABCD liegt in einer Ebene E. 4 BE

Ermitteln Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.

(zur Kontrolle: $3x - y + 5z - 5 = 0$)

Solarmodule werden auf einem Trägergestell montiert, das an einem vertikal stehenden Metallrohr befestigt ist. Die gesamte Fläche der Solarmodule wird modellhaft durch das Rechteck ABCD dargestellt, der Befestigungspunkt des Metallrohrs am Trägergestell durch den Punkt M (vgl. Abbildung). Im Koordinatensystem beschreibt die xy-Ebene den horizontalen Untergrund, auf dem das Metallrohr steht; eine Längeneinheit entspricht 1 m in der Wirklichkeit.



4.5 Im Sinne eines möglichst großen Energieertrags sollte der Neigungswinkel der Modulfläche gegenüber der Horizontalen zwischen 30° und 36° liegen. 3 BE

Prüfen Sie, ob diese Bedingung erfüllt ist.

4.6 Das Metallrohr lässt sich im Modell durch eine Strecke darstellen. 2 BE

Geben Sie eine Gleichung dieser Strecke an.

4.7 Zum betrachteten Zeitpunkt fällt das Sonnenlicht, das im Modell durch parallele Geraden dargestellt wird, senkrecht auf die Fläche der Solarmodule. Diese Fläche erzeugt auf dem horizontalen Untergrund einen rechteckigen Schatten. Begründen Sie die folgende Aussage unter Verwendung einer geeignet beschrifteten Skizze: 4 BE

Der Flächeninhalt des Rechtecks, das den Schatten im Modell darstellt, ist größer als der Flächeninhalt des Rechtecks ABCD.