

Mecklenburg-Vorpommern



MUSTERABITUR 2022 & 2023

Mathematik

Grundkurs

Prüfungsteil A – hilfsmittelfreie Aufgaben

Name, Vorname: _____

Arbeitsblatt

Dieses Arbeitsblatt ist ohne Zuhilfenahme von Tafelwerk oder Taschenrechner zu bearbeiten. Zusätzliche Lösungsblätter sind mit Ihrem Namen zu versehen und in dieses Arbeitsblatt einzulegen.

Für dieses Arbeitsblatt beträgt die Bearbeitungszeit maximal 90 Minuten.

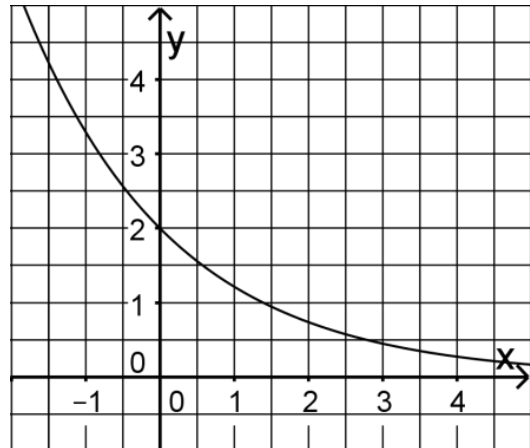
Zu bearbeiten sind die **vier** Pflichtaufgaben sowie **eine** der drei Wahlaufgaben.

1 Analysis – Pflichtaufgabe	BE
Gegeben ist die in \mathbb{R} definierte Funktion $f : f(x) = x^3 + 2x^2$.	
1.1 Bestätigen Sie, dass $x_1 = -2$ und $x_2 = 0$ die einzigen Nullstellen von f sind.	2
1.2 Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der x -Achse einschließt.	3

2 Analysis – Pflichtaufgabe

BE

Die Abbildung zeigt den Graphen der in \mathbb{R} definierten Funktion f mit $f(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x}$. Für die erste Ableitungsfunktion f' von f gilt $f'(x) = -e^{-\frac{1}{2}x}$.



- 2.1 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f in seinem Schnittpunkt mit der y -Achse.

2

- 2.2 Zeichnen Sie in die Abbildung ein Flächenstück ein, das vom Graphen von f , der x -Achse, der y -Achse sowie einer zur y -Achse parallelen Geraden eingeschlossen wird und dessen Flächeninhalt etwa 1,5 beträgt. Geben Sie einen Term an, mit dem der Inhalt des von Ihnen eingezeichneten Flächenstücks berechnet werden kann.

3

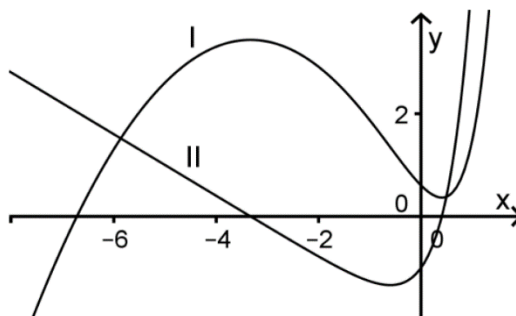
3 Analytische Geometrie – Pflichtaufgabe	BE
Gegeben sind die Punkte $A(-2 1 -2)$, $B(1 2 -1)$ und $C(1 1 4)$ sowie für eine reelle Zahl d der Punkt $D(d 1 4)$.	
3.1 Zeigen Sie, dass A, B und C Eckpunkte eines Dreiecks sind, und geben Sie eine Gleichung der Ebene an, in der dieses Dreieck liegt.	3
3.2 Das Dreieck ABD ist im Punkt B rechtwinklig. Ermitteln Sie den Wert von d .	2

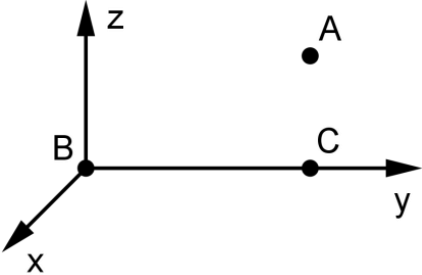
4 Analytische Geometrie – Pflichtaufgabe	BE
Gegeben ist das Quadrat ABCD mit $A(3 3 4)$, $B(6 7 4)$, $C(2 10 4)$ und $D(-1 6 4)$. Das Quadrat liegt in der Ebene mit der Gleichung $z = 4$.	
4.1 Weisen Sie nach, dass das Quadrat den Flächeninhalt 25 besitzt.	2
4.2 Es gibt Punkte S, für die die Pyramide ABCDS das Volumen 50 hat. Bestimmen Sie die z-Koordinate eines dieser Punkte.	3

Von den folgenden drei Wahlaufgaben ist **eine** zu bearbeiten.

5 Analysis – Wahlaufgabe	BE
<p>Ein Behälter enthält zu Beobachtungsbeginn zwei Liter einer Flüssigkeit. Für die anschließenden fünf Stunden gibt die Funktion f mit $f(t) = -t \cdot (t - 4)$ die momentane Zuflussrate der Flüssigkeit in Liter pro Stunde an. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden.</p>	
<p>5.1 Begründen Sie, dass das Volumen der Flüssigkeit im Behälter innerhalb der ersten vier Stunden nach Beobachtungsbeginn durchgehend zunimmt.</p>	3
<p>5.2 Geben Sie eine Gleichung an, mit der berechnet werden kann, wie viele Stunden vom Beobachtungsbeginn an vergehen, bis der Behälter sieben Liter der Flüssigkeit enthält.</p>	2

6 Analysis – Wahlaufgabe	BE
<p data-bbox="199 264 791 376">6.1 Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion und der zugehörigen Ableitungsfunktion.</p> <p data-bbox="295 421 791 577">Entscheiden Sie, welcher der Graphen I und II die Ableitungsfunktion darstellt. Begründen Sie Ihre Entscheidung.</p>	2
<p data-bbox="199 1122 1410 1256">6.2 Eine nicht lineare Funktion h hat keine Nullstelle. Der Graph von h nähert sich für $x \rightarrow -\infty$ asymptotisch der Gerade mit der Gleichung $y = -3$. Geben Sie einen Funktionsterm von h an und skizzieren Sie den zugehörigen Graphen.</p>	3



7 Analytische Geometrie – Wahlaufgabe	BE
<p>In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0 4 2)$, $B(0 0 0)$ und $C(0 4 0)$ gegeben (vgl. Abbildung). Eine Gerade g verläuft durch A und hat den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.</p>	
7.1 Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punkts, der auf g liegt und von A den Abstand 6 hat.	2
7.2 Ermitteln Sie die Koordinaten zweier Punkte, die von A , B und C den gleichen Abstand haben.	3

Mecklenburg-Vorpommern



MUSTERABITUR 2022 & 2023

Mathematik (CAS)

Grundkurs

Prüfungsteil B – komplexe Aufgaben

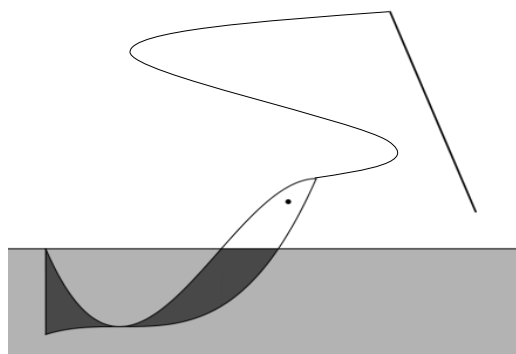
1 Analysis

Gegeben ist die Funktionenschar $f_t(x) = (x^2 - t \cdot x) \cdot e^x$ mit $x, t \in \mathbb{R}$.

- 1.1 Zeigen Sie, dass die Graphen von f_t für alle Werte von t durch den Koordinatenursprung verlaufen. 1 BE
- 1.2 Zeichnen Sie den Graph von f_2 im Intervall $-5 \leq x \leq 2$ in ein Koordinatensystem. 2 BE
- 1.3 Für alle Werte von t hat der Graph von f_t einen Hochpunkt. Bestimmen Sie den zugehörigen Wert von t so, dass der Hochpunkt die x -Koordinate -3 hat. 2 BE
- 1.4 Das Dreieck mit den Eckpunkten $A(0 | 0)$, $B(a | 0)$ und $C(a | f_2(a))$ hat den Flächeninhalt 2022. Berechnen Sie einen Näherungswert von a . 3 BE
- 1.5 Für einen Wert von t gibt es nur eine Tangente an den Graphen von f_t , die eine Ursprungsgerade ist. Ermitteln Sie diesen Wert von t . 2 BE

2 Analysis

Die Abbildung zeigt das Logo eines Geschäfts für Anglerbedarf. Die obere Spitze der Schwanzflosse des Fisches liegt auf der Wasseroberfläche; die Strecke zwischen oberer und unterer Spitze der Schwanzflosse steht senkrecht zur Wasseroberfläche.



Bei Verwendung eines geeigneten Koordinatensystems kann die untere

Begrenzungslinie des Fisches mithilfe der in \mathbb{R} definierten Funktion $u(x) = \frac{1}{8}x^3$, die obere

Begrenzungslinie mithilfe der in \mathbb{R} definierten Funktion $v(x) = \frac{1}{4}x^2 \cdot (4 - x)$ beschrieben und

die Wasseroberfläche durch die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{5}{4}$ dargestellt werden.

- 2.1 Zeigen Sie, dass die Graphen von u und v nur die Punkte $P(0|0)$ und $Q\left(\frac{8}{3} \mid \frac{64}{27}\right)$ gemeinsam haben. 3 BE
- 2.2 Weisen Sie nach, dass der Punkt Q ein Extrempunkt des Graphen von v ist, und geben Sie die Art dieses Extrempunkts an. 3 BE
- 2.3 Entscheiden Sie für jede der Aussagen I und II, ob sie richtig oder falsch ist. Begründen Sie Ihre Entscheidung jeweils rechnerisch. 4 BE
- I Für jeden Wert von $x \in \left]0; \frac{8}{3}\right[$ ist die Steigung des Graphen von v größer als die Steigung des Graphen von u .
- II Die Graphen von u und v berühren sich im Punkt P .
- 2.4 Berechnen Sie die Ausdehnung des Fisches in x -Richtung und in y -Richtung. 5 BE
- 2.5 Der dunkelgrau markierte Teil des Fisches befindet sich im Wasser. Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Teils des Fisches. 6 BE

Der Aufgabentext wird auf der folgenden Seite fortgesetzt.

- 2.6 Das Logo des Geschäfts soll verändert werden. Für die obere Begrenzungslinie des Fisches wird weiterhin die Funktion v verwendet. Die untere Begrenzungslinie jedoch soll anstelle von u mithilfe einer anderen der in \mathbb{R} definierten Funktionen $u_k(x) = \frac{1}{8} k \cdot x^3$ mit $k > 0$ beschrieben werden. Der gemeinsame Punkt der Graphen von u_k und v , der die x -Koordinate $\frac{8}{k+2}$ hat, stellt die Kopfspitze dar.
- 2.6.1 Weisen Sie nach, dass die x -Achse für alle Werte von k Tangente an den Graphen von u_k in dessen Wendepunkt ist. 2 BE
- 2.6.2 Bestimmen Sie, wie der Wert von k gewählt werden müsste, damit die Ausdehnung der Schwanzflosse in y -Richtung $\frac{3}{2}$ beträgt. 3 BE
- 2.6.3 Beschreiben Sie den Einfluss des Parameters k auf die Lage der Kopfspitze. 2 BE
- 2.6.4 Untersuchen Sie für jede der folgenden Eigenschaften I, II und III, für welche Werte von k diese zutrifft. 7 BE
- I Die Kopfspitze ragt aus dem Wasser heraus.
 - II Die obere Begrenzungslinie des Fisches verläuft an der Kopfspitze parallel zur Wasseroberfläche.
 - III Die Kopfspitze ist der höchste Punkt des Fisches.

3 Analytische Geometrie

Im Landschaftsgarten Neubrandenburg steht eine rechteckige Aussichtsplattform mit Dach (siehe Abbildung 1). In einem Koordinatensystem liegt die Aussichtsplattform in der xy -Ebene. Die Ecken des dreieckigen Daches werden durch die Koordinaten $A(0|0|3)$, $B(5|0|2,5)$ und $C(0|6|3,5)$ beschrieben. Drei der vier Eckpunkte der Plattform befinden sich ungefähr lotrecht unter den Eckpunkten des Dachs. Der vierte Eckpunkt der Plattform hat die Koordinaten $(5|6|0)$.

Die Längeneinheit ist 1 m.



Abbildung 1: Foto der Aussichtsplattform im Landschaftsgarten

3.1 Stellen Sie das Dach und die Plattform in einem Koordinatensystem grafisch dar. 3 BE

3.2 Bestimmen Sie für die Ebene, in der die Punkte A, B und C liegen, eine Gleichung in Koordinatenform. 3 BE

$$\text{Zur Kontrolle: } \vec{n}_E : \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 60 \end{pmatrix}$$

3.3 Berechnen Sie die Größe des Neigungswinkels des Dachs gegenüber der Plattform. 2 BE

3.4 Skizzieren Sie in die Abbildung 2 die Lage der Koordinatenachsen. 2 BE



Abbildung 2

4 Analytische Geometrie

Die Abbildung zeigt ein Gebäude des Flughafens von Palma de Mallorca. Im eingezeichneten kartesischen Koordinatensystem kann die 140 Meter lange Dachkonstruktion modellhaft durch einen halben Zylinder und drei Prismen zusammengesetzt werden; die dreieckigen Grundflächen dieser Prismen sind kongruent.



Der Boden des Gebäudes sowie die Startbahnen des Flughafens liegen im Modell in der xy -Ebene. Die Seitenkanten der Prismen verlaufen parallel zur y -Achse. Die Punkte $A(7|0|4)$, $B(0|0|4)$ und $C(3,5|0|7,5)$ sind Eckpunkte eines der Prismen. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.

4.1 Weisen Sie nach, dass das Dreieck ABC gleichschenkelig und im Punkt C rechtwinklig ist. 3 BE

4.2 Bestimmen Sie das Volumen der gesamten Dachkonstruktion. 3 BE

Der Abbildung liegt ein Foto zugrunde. Die Position der Kamera, mit der dieses Foto aufgenommen wurde, wird durch den Punkt $K(30|20|1,5)$ dargestellt. Die weiße Dachfläche, die mit dem Schriftzug „Aeropuerto de Palma de Mallorca“ versehen ist, liegt im Modell in der Ebene E .

4.3 Ermitteln Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform. 3 BE

(zur Kontrolle: $E : x + z = 11$)

4.4 Eine Sichtlinie verläuft von der Kamera geradlinig zum Mittelpunkt der weißen Dachfläche. Berechnen Sie die Größe des Winkels, den diese Sichtlinie mit der Dachfläche einschließt.¹ 4 BE

Der Aufgabentext wird auf der folgenden Seite fortgesetzt.

¹ Winkelberechnung zwischen einer Gerade und einer beliebigen Ebene übersteigt im Grundkurs die Anforderungen des Rahmenplans in M-V und ist daher nicht prüfungsrelevant.

Hinter dem Gebäude startet ein Flugzeug. Ab einer bestimmten Höhe über der Startbahn ist die Flugzeugspitze von der Position der Kamera aus oberhalb des Gebäudes sichtbar. Im Folgenden soll diese Höhe ermittelt werden.

- 4.5 Begründen Sie anhand einer geeignet beschrifteten Skizze, dass diejenigen Punkte der Dachkonstruktion, die am höchsten über dem Boden des Gebäudes liegen, für die Ermittlung der gesuchten Höhe keine Rolle spielen. 2 BE

- 4.6 Von der Position der Kamera aus wird die Flugzeugspitze unmittelbar oberhalb derjenigen Punkte der Dachkonstruktion sichtbar, die im Modell näherungsweise auf

der Gerade mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1,1 \\ 0 \\ 10,9 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ liegen. Die Spitze des startenden

Flugzeugs bewegt sich im Modell entlang der Gerade mit der Gleichung

$\vec{x} = \begin{pmatrix} -60 \\ -990 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1000 \\ 0 \\ 350 \end{pmatrix}$. Ermitteln Sie die gesuchte Höhe.