

Mecklenburg-Vorpommern



Musterabitur 2021 bis 2023

Mathematik

Leistungskurs

Prüfungsteil A – hilfsmittelfreie Aufgaben

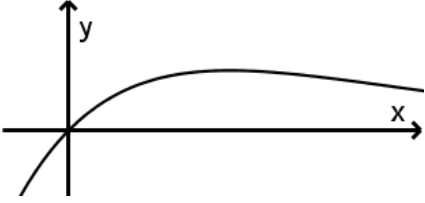
Name, Vorname: _____

Arbeitsblatt

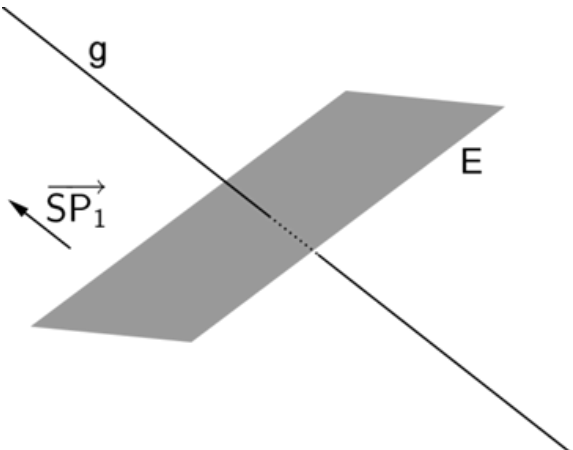
Dieses Arbeitsblatt ist ohne Zuhilfenahme von Tafelwerk oder Taschenrechner zu bearbeiten. Zusätzliche Lösungsblätter sind mit Ihrem Namen zu versehen und in dieses Arbeitsblatt einzulegen.

Für dieses Arbeitsblatt beträgt die Bearbeitungszeit maximal 100 Minuten.

Zu bearbeiten sind die **vier** Pflichtaufgaben sowie **zwei** der drei Wahlaufgaben.

1 Analysis – Pflichtaufgabe	BE
<p>Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x \cdot e^{-x}$ und $x \in \mathbb{R}$. Betrachtet werden die Dreiecke mit den Eckpunkten $O(0 0)$, $P(a 0)$ und $Q(a f(a))$ mit $a \in \mathbb{R}^+$.</p>	
<p>1.1 Begründen Sie, dass der Flächeninhalt jedes dieser Dreiecke mit dem Term $\frac{1}{2} a^2 e^{-a}$ bestimmt werden kann.</p>	2
<p>1.2 Unter den betrachteten Dreiecken hat eines den größten Flächeninhalt. Bestimmen Sie den zugehörigen Wert von a.</p>	3

2 Analysis – Pflichtaufgabe	BE
Gegeben ist die in \mathbb{R} definierte Funktion f mit $f(x) = \sin x$ und $g(x) = x$. Die Graphen von f und g haben in ihrem einzigen gemeinsamen Punkt $O(0 0)$ die gleiche Steigung.	
2.1 Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f , der Graph von g und die Gerade mit der Gleichung $x = \pi$ einschließen.	3
2.2 Geben Sie eine Gleichung einer Tangente an den Graphen von f an, die die beiden folgenden Eigenschaften hat: <ul style="list-style-type: none">• Die Tangente verläuft parallel zum Graphen von g.• Die Tangente enthält nicht den Punkt O.	2

3 Analytische Geometrie – Pflichtaufgabe	BE
Die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ und die Ebene $E: x + 2y - 2z = 2$ schneiden sich im Punkt S .	
3.1 Berechnen Sie die Koordinaten von S .	3
3.2 Der Punkt P_1 liegt auf g , aber nicht in E . Die Abbildung zeigt die Ebene E , die Gerade g sowie einen Repräsentanten des Vektors \vec{SP}_1 . Für den Punkt P_2 gilt $\vec{OP}_2 = \vec{OP}_1 - 4 \cdot \vec{SP}_1$, wobei O den Koordinatenursprung bezeichnet. Zeichnen Sie die Punkte S , P_1 und P_2 in die Abbildung ein. 	2

4 Stochastik – Pflichtaufgabe	BE
Ein Glücksrad hat drei Sektoren, einen blauen, einen gelben und einen roten. Diese sind unterschiedlich groß. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim einmaligen Drehen der blaue Sektor getroffen wird, beträgt p .	
4.1 Interpretieren Sie den Term $(1-p)^7$ im Sachzusammenhang.	2
4.2 Das Glücksrad wird zehnmal gedreht. Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden kann, dass der blaue Sektor genau zweimal getroffen wird.	1
4.3 Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim einmaligen Drehen der gelbe Sektor getroffen wird, beträgt 50 %. Felix hat 100 Drehungen des Glücksrads beobachtet und festgestellt, dass bei diesen der Anteil der Drehungen, bei denen der gelbe Sektor getroffen wurde, deutlich geringer als 50 % war. Er folgert: „Der Anteil der Drehungen, bei denen der gelbe Sektor getroffen wird, muss also bei den nächsten 100 Drehungen deutlich größer als 50 % sein.“ Beurteilen Sie die Aussage von Felix.	2

Von den folgenden drei Wahlaufgaben sind **zwei** zu bearbeiten.

5 Analysis – Wahlaufgabe

BE

Abbildung 1 stellt für einen Wassertank die Zufluss- bzw. Abflussrate (in $\frac{\text{m}^3}{\text{h}}$) von Wasser für einen Beobachtungszeitraum von sechs Stunden dar. Zu Beginn der Beobachtung enthält der Tank 2m^3 Wasser.

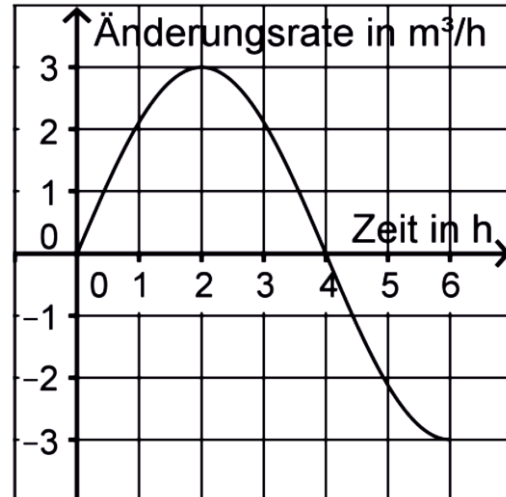


Abbildung 1

5.1 Bestimmen Sie das Volumen des Wassers, das sich zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn im Tank befindet.

2

5.2 Skizzieren Sie in Abbildung 2 den Graphen, der die Entwicklung des Volumens des Wassers im Tank in Abhängigkeit von der Zeit darstellt.

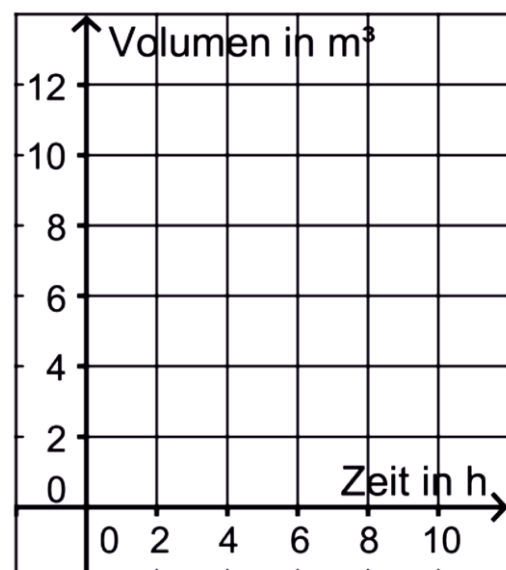


Abbildung 2

3

6 Analytische Geometrie – Wahlaufgabe	BE
Der Punkt $P(0 1 5)$ ist Eckpunkt eines Quadrats. Orthogonal zu der Ebene, in der dieses Quadrat liegt, verläuft die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$.	
6.1 Begründen Sie, dass das Quadrat in der yz -Ebene liegt.	2
6.2 Der Schnittpunkt der beiden Diagonalen des Quadrats liegt auf der Gerade g , der Punkt $Q(0 8 4)$ in der yz -Ebene. Zeigen Sie, dass Q einer der beiden Eckpunkte des Quadrats ist, die dem Eckpunkt P benachbart sind.	3

7 Stochastik – Wahlaufgabe	BE
<p>Eine Urne A ist mit fünf roten und fünf blauen Kugeln gefüllt, eine Urne B mit n roten und $3 \cdot n$ blauen, wobei $n > 0$ gilt. Aus der Urne A wird eine Kugel zufällig entnommen und in die Urne B gelegt. Danach wird aus der Urne B eine Kugel zufällig entnommen und in die Urne A gelegt. Nun befindet sich in der Urne A eine unbekannte Anzahl roter Kugeln.</p>	
7.1 Geben Sie alle Möglichkeiten für diese unbekannte Anzahl an.	1
7.2 Für einen bestimmten Wert von n beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die unbekannte Anzahl roter Kugeln in der Urne A fünf ist, $\frac{15}{29}$. Bestimmen Sie diesen Wert von n .	4

Mecklenburg-Vorpommern



Musterabitur 2021 bis 2023

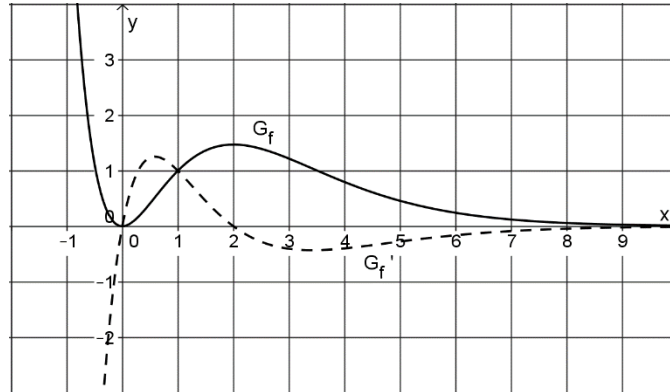
Mathematik (WTR)

Leistungskurs

Prüfungsteil B – komplexe Aufgaben

1 Analysis

Die Abbildung zeigt den Graphen G_f der in \mathbb{R} definierten Funktion f mit $f(x) = x^2 \cdot e^{1-x}$ sowie den Graphen $G_{f'}$ der zugehörigen ersten Ableitungsfunktion f' .



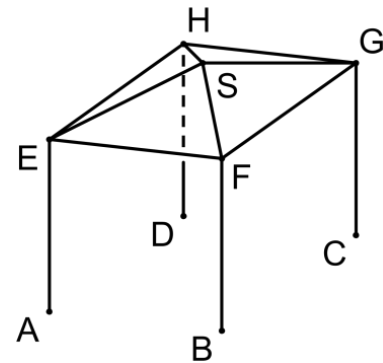
- 1.1 Beschreiben Sie die Eigenschaft von 4 BE
- $G_{f'}$, aus der sich folgern lässt, dass G_f bei $x = 0$ einen Tiefpunkt hat.
 - $G_{f'}$, aus der sich folgern lässt, dass G_f bei $x = 0,6$ einen Hochpunkt hat.
- 1.2 Weisen Sie nach, dass $F(x) = -(x^2 + 2x + 2) \cdot e^{1-x}$ ein Term einer Stammfunktion von f ist. Bestimmen Sie einen Term derjenigen Stammfunktion von f , deren Graph durch den Punkt $(1 | -3)$ verläuft. 5 BE
- 1.3 Der Graph von f beschreibt modellhaft die 7,5 Sekunden dauernde Fahrt eines Lastenaufzugs. Dabei ist x die seit Beginn der Fahrt vergangene Zeit in Sekunden und y die Geschwindigkeit des Aufzugs in Meter pro Sekunde.
- 1.3.1 Entnehmen Sie der Abbildung die größte Geschwindigkeit des Aufzugs und geben Sie diese an. 1 BE
- 1.3.2 Berechnen Sie für den Zeitraum von 2,0 s bis 4,0 s nach Beginn der Fahrt die mittlere Änderung der Geschwindigkeit. 3 BE
- 1.3.3 Geben Sie die Bedeutung der unterschiedlichen Vorzeichen von $f'(x)$ im Sachzusammenhang an. 2 BE
- 1.3.4 Der Wert des Terms $\int_0^{7,5} f(x) dx$ kann als Länge der vom Aufzug zurückgelegten Strecke interpretiert werden. Berechnen Sie diese Länge. 2 BE

Der Aufgabentext wird auf der folgenden Seite fortgesetzt.

- 1.3.5 Begründen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist: 4 BE
Würde der Graph von f die Fahrt eines Aufzugs beschreiben, die länger als 7,5 Sekunden dauert, so wäre die von diesem Aufzug zurückgelegte Strecke – unabhängig von der Dauer seiner Fahrt – kürzer als 5,5 m.
- 1.4 Das für die 7,5 Sekunden dauernde Fahrt des Aufzugs bisher verwendete Modell wird geändert. Für $0 \leq x \leq 6$ wird die Fahrt weiterhin durch G_f , für $x > 6$ jedoch mithilfe der Tangente an G_f im Punkt $(6 | f(6))$ beschrieben.
- 1.4.1 Zeigen Sie rechnerisch, dass der Aufzug im geänderten Modell nach 7,5 Sekunden tatsächlich zum Stehen kommt. 5 BE
- 1.4.2 Der Aufzug legt im geänderten Modell während der gesamten Fahrtzeit von 7,5 Sekunden eine bestimmte Strecke zurück. Beschreiben Sie, wie man denjenigen Zeitpunkt berechnen könnte, bis zu dem der Aufzug diese Strecke im ursprünglichen Modell zurücklegt. 4 BE
- 1.5 Betrachtet wird die in \mathbb{R} definierte Funktion h mit $h(x) = 1 + 2 \cdot (x - 1)^2 \cdot e^{2-x}$.
- 1.5.1 Begründen Sie, dass h keine Nullstelle besitzt. 2 BE
- 1.5.2 Es gilt $h(x) = 1 + 2 \cdot f(x - 1)$. Beschreiben Sie, wie der Graph von h schrittweise aus dem in der Abbildung gezeigten Graphen von f erzeugt werden kann. 5 BE
Begründen Sie, dass dabei die Reihenfolge der Schritte nicht beliebig ist.
- 1.5.3 In der Abbildung stellt eine der beiden Kurven die Funktion f dar. Zeichnen Sie in die Abbildung ein Koordinatensystem ein, in dem diese Kurve die Funktion h darstellt. 3 BE

2 Analytische Geometrie

Ein Turm auf einem Spielplatz besteht aus vier 4,50 m langen, vertikal stehenden Pfosten, vier horizontalen Balken und einem Dach in Form einer geraden Pyramide. Die Abbildung zeigt den Turm schematisch. Die Dicke der Bauteile des Turms soll vernachlässigt werden.



In einem kartesischen Koordinatensystem können die Enden der Pfosten für einen Wert von z mit $z \in \mathbb{R}$ modellhaft durch die Punkte $A(2|-3|z)$, B , C und $D(-3|-2|z)$ sowie $E(2|-3|4)$, $F(3|2|4)$, $G(-2|3|4)$ und H dargestellt werden, die Spitze des Dachs durch den Punkt $S(0|0|5)$. Dabei beschreibt die xy -Ebene den Untergrund; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m in der Wirklichkeit.

- 2.1 Geben Sie an, wie tief die Pfosten in den Untergrund hineinreichen. 1 BE
- 2.2 Geben Sie die Koordinaten des Punkts H an. Weisen Sie nach, dass das Viereck $EFGH$ ein Quadrat ist. 5 BE
- 2.3 Begründen Sie, dass die Pyramide $EFGHS$ symmetrisch zur z -Achse ist. 3 BE
- 2.4 Die Punkte E , F und S liegen in einer Ebene L . 4 BE
Bestimmen Sie eine Gleichung von L in Koordinatenform.
- 2.5 An der Spitze des Dachs ist eine gerade Stange befestigt, deren oberer Endpunkt im Modell durch einen Punkt T dargestellt wird. Auf den Turm treffendes Sonnenlicht lässt sich im Modell durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor \vec{v} beschreiben. Der Schatten der Stange liegt vollständig auf der Dachfläche, die durch das Dreieck EFS beschrieben wird. 4 BE
Beschreiben Sie, wie man die Länge dieses Schattens berechnen kann, wenn die Koordinaten von T und \vec{v} bekannt sind.

Der Aufgabentext wird auf der folgenden Seite fortgesetzt.

- 2.6 Zur Stabilisierung des Turms wurden zusätzliche Balken mit einer Länge von 2,10 m verwendet. Ein solcher Balken ist mit einem Ende in einer Höhe von 3,50 m über dem Untergrund an einem der vertikal stehenden Pfosten befestigt, mit dem anderen Ende an einem der beiden darauf liegenden horizontalen Balken. Der obere Befestigungspunkt teilt den horizontalen Balken in zwei Abschnitte.
- Bestimmen Sie das Verhältnis der Längen der beiden Abschnitte. 5 BE
- 2.7 Es soll eine vertikale Kletterstange aufgestellt werden, deren Fußpunkt im Modell durch einen Punkt P der xy-Ebene beschrieben wird. Die Kletterstange soll von dem Pfosten, der durch \overline{AE} dargestellt wird, doppelt so weit entfernt sein wie von dem Pfosten, der durch \overline{BF} dargestellt wird. 3 BE
- Bestimmen Sie für zwei mögliche Positionen der Kletterstange jeweils die Koordinaten von P.

3 Stochastik

- 3.1 Ein Unternehmen organisiert Fahrten mit einem Ausflugsschiff
Betrachtet wird zunächst eine Fahrt, bei der das Schiff mit 60 Fahrgästen voll besetzt ist. Zu Beginn der Fahrt werden drei Fahrgäste zufällig ausgewählt; diese erhalten jeweils ein Freigetränk.
- 3.1.1 Ermitteln Sie die Anzahl möglicher Dreiergruppen, die sich bei der Auswahl ergeben können. 2 BE
- 3.1.2 Zwei Drittel der Fahrgäste kommen aus Deutschland, die übrigen aus anderen Ländern. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die drei ausgewählten Fahrgäste aus Deutschland kommen. 2 BE
- 3.1.3 Unter den Fahrgästen befinden sich Erwachsene und Kinder. Die Hälfte der Fahrgäste isst während der Fahrt ein Eis, von den Erwachsenen nur jeder Dritte, von den Kindern 75 %. Berechnen Sie, wie viele Kinder an der Fahrt teilnehmen. 3 BE

Möchte man an einer Fahrt teilnehmen, so muss man dafür im Voraus eine Reservierung vornehmen. Erfahrungsgemäß erscheinen von den Personen mit Reservierung einige nicht zur Fahrt. Für die 60 Plätze lässt das Unternehmen deshalb bis zu 64 Reservierungen zu. Es soll davon ausgegangen werden, dass für jede Fahrt tatsächlich 64 Reservierungen vorgenommen werden. Erscheinen mehr als 60 Personen mit Reservierung zur Fahrt, so können nur 60 von ihnen daran teilnehmen; die übrigen müssen abgewiesen werden.

Vereinfachend soll angenommen werden, dass die Anzahl der Personen mit Reservierung, die zur Fahrt erscheinen, binomialverteilt ist, wobei die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person mit Reservierung nicht zur Fahrt erscheint, 10 % beträgt.

- 3.1.4 Geben Sie einen Grund dafür an, dass es sich bei dieser Annahme im Sachzusammenhang um eine Vereinfachung handelt. 1 BE
- 3.1.5 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine Person mit Reservierung abgewiesen werden muss. 3 BE
- 3.1.6 Für das Unternehmen wäre es hilfreich, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, mindestens eine Person mit Reservierung abweisen zu müssen, kleiner als ein Prozent wäre. Dazu müsste die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person mit Reservierung nicht zur Fahrt erscheint, mindestens einen bestimmten Wert haben. Ermitteln Sie diesen Wert auf ganze Prozent genau. 4 BE

Der Aufgabentext wird auf der folgenden Seite fortgesetzt.

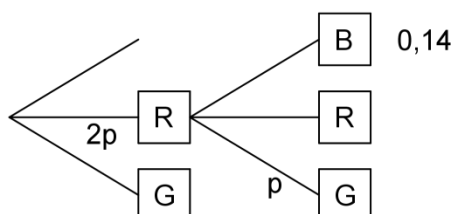
- 3.2 Für ein Spiel wird ein Glücksrad verwendet, das drei farbige Sektoren hat. Der Tabelle können die Farben der Sektoren und die Größen der zugehörigen Mittelpunktswinkel entnommen werden.

Farbe	Blau	Rot	Grün
Mittelpunktswinkel	180°	120°	60°

Für einen Einsatz von 5 Euro darf ein Spieler das Glücksrad dreimal drehen. Erzielt der Spieler dreimal die gleiche Farbe, werden ihm 10 Euro ausgezahlt. Erzielt er drei verschiedene Farben, wird ein anderer Betrag ausgezahlt. In allen anderen Fällen erfolgt keine Auszahlung.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dreimal die gleiche Farbe erzielt wird, ist $\frac{1}{6}$.

- 3.2.1 Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass drei verschiedene Farben erzielt werden, ebenfalls $\frac{1}{6}$ beträgt. 2 BE
- 3.2.2 Bei dem Spiel ist zu erwarten, dass sich die Einsätze der Spieler und die Auszahlungen auf lange Sicht ausgleichen. Berechnen Sie den Betrag, der ausgezahlt wird, wenn drei verschiedene Farben erscheinen. 3 BE
- 3.2.3 Die Größen der Sektoren werden geändert. Dabei wird der grüne Sektor verkleinert. Die Abbildung zeigt einen Teil eines Baumdiagramms das für das geänderte Glücksrad die beiden ersten Drehungen beschreibt. Ergänzend ist für einen Pfad die zugehörige Wahrscheinlichkeit angegeben. 5 BE



Bestimmen Sie die Größe des zum blauen Sektor gehörenden Mittelpunktswinkels.