Mecklenburg-Vorpommern

Musterabitur 2021 bis 2023

Mathematik

Leistungskurs

Prüfungsteil A – hilfsmittelfreie Aufgaben

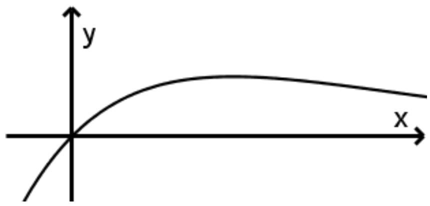
Name, Vorname: ______________________________

Arbeitsblatt

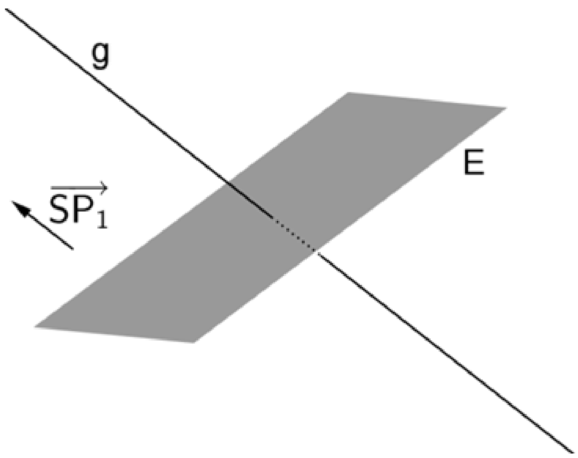
Dieses Arbeitsblatt ist ohne Zuhilfenahme von Tafelwerk oder Taschenrechner zu bearbeiten. Zusätzliche Lösungsblätter sind mit Ihrem Namen zu versehen und in dieses Arbeitsblatt einzulegen.

Für dieses Arbeitsblatt beträgt die Bearbeitungszeit maximal 100 Minuten.

Zu bearbeiten sind die **vier** Pflichtaufgaben sowie **zwei** der drei Wahlaufgaben.

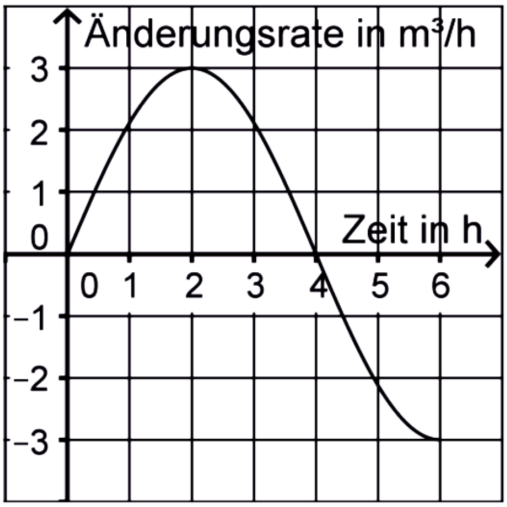
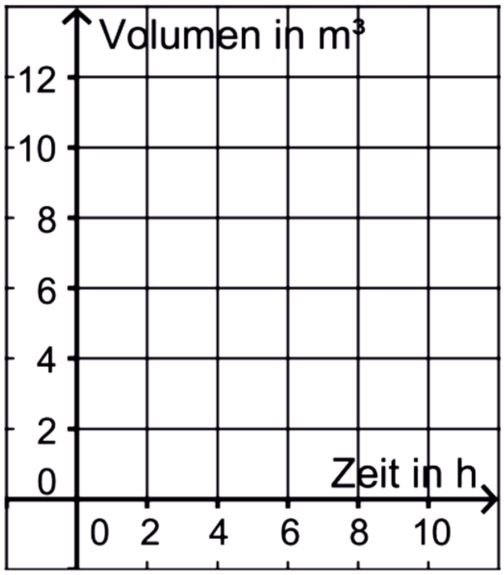
1 Analysis – Pflichtaufgabe	BE
Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x \cdot e^{-x}$ und $x \in IR$. Betrachtet werden die Dreiecke mit den Eckpunkten $O(0\|0)$, $P(a\|0)$ und $Q(a\|f(a))$ mit $a \in IR^+$. 	
1.1 Begründen Sie, dass der Flächeninhalt jedes dieser Dreiecke mit dem Term $\frac{1}{2}a^2 e^{-a}$ bestimmt werden kann.	2
1.2 Unter den betrachteten Dreiecken hat eines den größten Flächeninhalt. Bestimmen Sie den zugehörigen Wert von a.	3

2 Analysis – Pflichtaufgabe	BE
Gegeben ist die in IR definierte Funktion f mit $f(x) = \sin x$ und $g(x) = x$. Die Graphen von f und g haben in ihrem einzigen gemeinsamen Punkt $O(0\|0)$ die gleiche Steigung.	
2.1 Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f, der Graph von g und die Gerade mit der Gleichung $x = \pi$ einschließen.	3
2.2 Geben Sie eine Gleichung einer Tangente an den Graphen von f an, die die beiden folgenden Eigenschaften hat: • Die Tangente verläuft parallel zum Graphen von g. • Die Tangente enthält nicht den Punkt O.	2

3 Analytische Geometrie – Pflichtaufgabe	BE
Die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ und die Ebene E: $x + 2y - 2z = 2$ schneiden sich im Punkt S.	
3.1 Berechnen Sie die Koordinaten von S.	3
3.2 Der Punkt P_1 liegt auf g, aber nicht in E. Die Abbildung zeigt die Ebene E, die Gerade g sowie einen Repräsentanten des Vektors $\overrightarrow{SP_1}$. Für den Punkt P_2 gilt $\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OP_1} - 4 \cdot \overrightarrow{SP_1}$, wobei O den Koordinatenursprung bezeichnet. Zeichnen Sie die Punkte S, P_1 und P_2 in die Abbildung ein. 	2

4 **Stochastik – Pflichtaufgabe**	BE
Ein Glücksrad hat drei Sektoren, einen blauen, einen gelben und einen roten. Diese sind unterschiedlich groß. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim einmaligen Drehen der blaue Sektor getroffen wird, beträgt p.	
4.1 Interpretieren Sie den Term $(1-p)^7$ im Sachzusammenhang.	2
4.2 Das Glücksrad wird zehnmal gedreht. Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden kann, dass der blaue Sektor genau zweimal getroffen wird.	1
4.3 Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim einmaligen Drehen der gelbe Sektor getroffen wird, beträgt 50 %. Felix hat 100 Drehungen des Glücksrads beobachtet und festgestellt, dass bei diesen der Anteil der Drehungen, bei denen der gelbe Sektor getroffen wurde, deutlich geringer als 50 % war. Er folgert: „Der Anteil der Drehungen, bei denen der gelbe Sektor getroffen wird, muss also bei den nächsten 100 Drehungen deutlich größer als 50 % sein.“ Beurteilen Sie die Aussage von Felix.	2

Von den folgenden drei Wahlaufgaben sind **zwei** zu bearbeiten.

5 Analysis – Wahlaufgabe	BE
Abbildung 1 stellt für einen Wassertank die Zufluss- bzw. Abflussrate (in $\frac{m^3}{h}$) von Wasser für einen Beobachtungszeitraum von sechs Stunden dar. Zu Beginn der Beobachtung enthält der Tank $2\,m^3$ Wasser.  Abbildung 1	
5.1 Bestimmen Sie das Volumen des Wassers, das sich zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn im Tank befindet.	2
5.2 Skizzieren Sie in Abbildung 2 den Graphen, der die Entwicklung des Volumens des Wassers im Tank in Abhängigkeit von der Zeit darstellt.  Abbildung 2	3

6 Analytische Geometrie – Wahlaufgabe	BE
Der Punkt $P(0\|1\|5)$ ist Eckpunkt eines Quadrats. Orthogonal zu der Ebene, in der dieses Quadrat liegt, verläuft die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$.	
6.1 Begründen Sie, dass das Quadrat in der yz-Ebene liegt.	2
6.2 Der Schnittpunkt der beiden Diagonalen des Quadrats liegt auf der Gerade g, der Punkt $Q(0\|8\|4)$ in der yz-Ebene. Zeigen Sie, dass Q einer der beiden Eckpunkte des Quadrats ist, die dem Eckpunkt P benachbart sind.	3

7 Stochastik – Wahlaufgabe	BE
Eine Urne A ist mit fünf roten und fünf blauen Kugeln gefüllt, eine Urne B mit n roten und $3 \cdot n$ blauen, wobei $n > 0$ gilt. Aus der Urne A wird eine Kugel zufällig entnommen und in die Urne B gelegt. Danach wird aus der Urne B eine Kugel zufällig entnommen und in die Urne A gelegt. Nun befindet sich in der Urne A eine unbekannte Anzahl roter Kugeln.	
7.1 Geben Sie alle Möglichkeiten für diese unbekannte Anzahl an.	1
7.2 Für einen bestimmten Wert von n beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die unbekannte Anzahl roter Kugeln in der Urne A fünf ist, $\frac{15}{29}$. Bestimmen Sie diesen Wert von n.	4

Mecklenburg-Vorpommern

Musterabitur 2021 bis 2023

Mathematik (CAS)

Leistungskurs

Prüfungsteil B – komplexe Aufgaben

1 Analysis

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{10^6}x^4 + \frac{4}{9375}x^3 - \frac{13}{250}x^2 + \frac{8}{5}x + 140$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$.

1.1 Berechnen Sie die Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von f und bestimmen Sie die Art dieser Extrempunkte. 5 BE

(zur Kontrolle: Die Extremstellen sind 20, 100 und 200.)

1.2 Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts des Graphen von f mit der y-Achse an. 4 BE

Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass f genau zwei Nullstellen hat.

1.3 Für $50 < x < 130$ gibt es ein Paar von x-Werten, die sich um 60 unterscheiden und für die die zugehörigen Funktionswerte übereinstimmen. Bestimmen Sie dieses Paar von x-Werten und geben Sie den zugehörigen Funktionswert an. 4 BE

1.4 Der Graph von f schließt mit den Koordinatenachsen und der Gerade mit der Gleichung $x = 240$ ein Flächenstück ein.

1.4.1 Bestimmen Sie eine Gleichung der Gerade, die parallel zur y-Achse verläuft und dieses Flächenstück halbiert. 4 BE

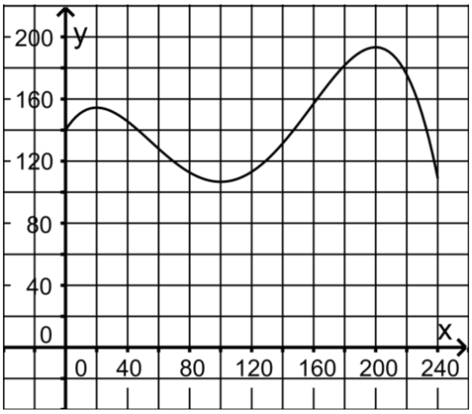
1.4.2 Die folgende Aussage bezieht sich auf eine zweite Gerade, die das Flächenstück teilt: 4 BE

$$\text{Für } u \approx 217 \text{ gilt: } \frac{1}{2} \cdot u \cdot f(u) + \int_u^{240} f(x)\,dx = \frac{2}{3} \cdot \int_0^{240} f(x)\,dx$$

Veranschaulichen Sie die Aussage unter Verwendung einer geeigneten Skizze.

1.5 Diabetespatientinnen und -patienten haben die Möglichkeit, mithilfe sogenannter CGM-Geräte ihren Glukosewert, d. h. den Anteil der Glukose im Blut, ständig zu messen.

Die gegebene Funktion f beschreibt für $0 \le x \le 240$ modellhaft die Entwicklung des Glukosewerts eines Patienten. Dabei ist x die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Minuten und $f(x)$ der Glukosewert in Milligramm pro Deziliter ($\frac{\text{mg}}{\text{dl}}$). Die Abbildung zeigt den Graphen von f.



Der Aufgabentext wird auf der folgenden Seite fortgesetzt.

1.5.1 Berechnen Sie für den betrachteten Zeitraum denjenigen Zeitpunkt, zu dem der Glukosewert am stärksten ansteigt. 4 BE

1.5.2 Ermitteln Sie für den betrachteten Zeitraum, wie lange die momentane Änderungsrate des Glukosewerts insgesamt zwischen $-0{,}3\,\frac{\text{mg}}{\text{dl}}$ pro Minute und $+0{,}3\,\frac{\text{mg}}{\text{dl}}$ pro Minute lag. 4 BE

1.5.3 Der Mittelwert der Funktionswerte von f für $x \in [a;b]$ kann mit dem folgenden Term berechnet werden: 5 BE

$$\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

Berechnen Sie damit für den Zeitraum von 20 Minuten bis 100 Minuten nach Beobachtungsbeginn den Mittelwert aller Glukosewerte.

Bestimmen Sie dessen prozentuale Abweichung vom Durchschnittswert derjenigen Glukosewerte, die in diesem Zeitraum im Abstand von jeweils zehn Minuten, beginnend mit dem Zeitpunkt 20 Minuten nach Beobachtungsbeginn, gemessen wurden.

1.6 Zum Zeitpunkt 240 Minuten nach Beobachtungsbeginn nimmt der Patient Traubenzucker zu sich. Die anschließende Entwicklung des Glukosewerts soll im Modell mithilfe einer Funktion g beschrieben werden, die folgende Bedingung erfüllt:

Die beiden Werte, die das Modell zum Zeitpunkt 240 Minuten nach Beobachtungsbeginn für den Glukosewert und für dessen momentane Änderungsrate liefert, sollen unabhängig davon sein, ob sie mithilfe der Funktion f oder mithilfe der Funktion g ermittelt werden.

Zur Bestimmung eines Funktionsterms von g sollen zunächst die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $h_k(x) = 50 - 50 \cdot (k \cdot x + 1)^2 \cdot e^{-k \cdot x}$ mit $k \in \mathbb{R}^+$ betrachtet werden.

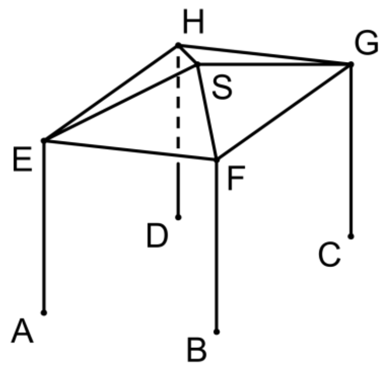
1.6.1 Bestimmen Sie den Wert von k so, dass die momentane Änderungsrate, die sich unter Verwendung von h_k für den Zeitpunkt 0 ergibt, mit der momentanen Änderungsrate übereinstimmt, die f für den Zeitpunkt 240 Minuten nach Beobachtungsbeginn liefert. 2 BE

1.6.2 Die für die Funktion g angegebene Bedingung lässt sich erfüllen, wenn der Graph von g durch eine geeignete Verschiebung aus dem Graphen von h_k für $k = \frac{308}{3125}$ hervorgeht. 4 BE

Beschreiben Sie diese Verschiebung und geben Sie einen Funktionsterm von g an.

2 Analytische Geometrie

Ein Turm auf einem Spielplatz besteht aus vier 4,50 m langen, vertikal stehenden Pfosten, vier horizontalen Balken und einem Dach in Form einer geraden Pyramide. Die Abbildung zeigt den Turm schematisch. Die Dicke der Bauteile des Turms soll vernachlässigt werden.



In einem kartesischen Koordinatensystem können die Enden der Pfosten für einen Wert von z mit $z \in \mathbb{R}$ modellhaft durch die Punkte $A(2|-3|z)$, B, C und $D(-3|-2|z)$ sowie $E(2|-3|4)$, $F(3|2|4)$, $G(-2|3|4)$ und H dargestellt werden, die Spitze des Dachs durch den Punkt $S(0|0|5)$. Dabei beschreibt die xy-Ebene den Untergrund; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m in der Wirklichkeit.

2.1 Geben Sie an, wie tief die Pfosten in den Untergrund hineinreichen. 1 BE

2.2 Geben Sie die Koordinaten des Punkts H an. Weisen Sie nach, dass das Viereck EFGH ein Quadrat ist. 5 BE

2.3 Begründen Sie, dass die Pyramide EFGHS symmetrisch zur z-Achse ist. 3 BE

2.4 Die Punkte E, F und S liegen in einer Ebene L. 3 BE

Bestimmen Sie eine Gleichung von L in Koordinatenform.

(zur Kontrolle: $5x - y + 13z = 65$)

2.5 Berechnen Sie die Größe des Neigungswinkels der Dachfläche, die durch das Dreieck EFS dargestellt wird, gegenüber der Horizontalen. 2 BE

2.6 An der Spitze des Dachs ist eine gerade Stange befestigt, deren oberer Endpunkt im Modell durch einen Punkt T dargestellt wird. Auf den Turm treffendes Sonnenlicht lässt sich im Modell durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\vec{v}$ beschreiben. Der Schatten der Stange liegt vollständig auf der Dachfläche, die durch das Dreieck EFS beschrieben wird. 4 BE

Beschreiben Sie, wie man die Länge dieses Schattens berechnen kann, wenn die Koordinaten von T und $\vec{v}$ bekannt sind.

Der Aufgabentext wird auf der folgenden Seite fortgesetzt.

2.7 Zur Stabilisierung des Turms wurden zusätzliche Balken mit einer Länge von 2,10 m verwendet. Ein solcher Balken ist mit einem Ende in einer Höhe von 3,50 m über dem Untergrund an einem der vertikal stehenden Pfosten befestigt, mit dem anderen Ende an einem der beiden darauf liegenden horizontalen Balken. Der obere Befestigungspunkt teilt den horizontalen Balken in zwei Abschnitte. 4 BE

Bestimmen Sie das Verhältnis der Längen der beiden Abschnitte.

2.8 Es soll eine vertikale Kletterstange aufgestellt werden, deren Fußpunkt im Modell durch einen Punkt P der xy-Ebene beschrieben wird. Die Kletterstange soll von dem Pfosten, der durch $\overline{AE}$ dargestellt wird, doppelt so weit entfernt sein wie von dem Pfosten, der durch $\overline{BF}$ dargestellt wird. 3 BE

Bestimmen Sie für zwei mögliche Positionen der Kletterstange jeweils die Koordinaten von P.

3 Stochastik

3.1 Ein Unternehmen organisiert Fahrten mit einem Ausflugsschiff

Betrachtet wird zunächst eine Fahrt, bei der das Schiff mit 60 Fahrgästen voll besetzt ist. Zu Beginn der Fahrt werden drei Fahrgäste zufällig ausgewählt; diese erhalten jeweils ein Freigetränk.

3.1.1 Ermitteln Sie die Anzahl möglicher Dreiergruppen, die sich bei der Auswahl ergeben können. 2 BE

3.1.2 Zwei Drittel der Fahrgäste kommen aus Deutschland, die übrigen aus anderen Ländern. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die drei ausgewählten Fahrgäste aus Deutschland kommen. 2 BE

3.1.3 Unter den Fahrgästen befinden sich Erwachsene und Kinder. Die Hälfte der Fahrgäste isst während der Fahrt ein Eis, von den Erwachsenen nur jeder Dritte, von den Kindern 75 %. Berechnen Sie, wie viele Kinder an der Fahrt teilnehmen. 3 BE

Möchte man an einer Fahrt teilnehmen, so muss man dafür im Voraus eine Reservierung vornehmen. Erfahrungsgemäß erscheinen von den Personen mit Reservierung einige nicht zur Fahrt. Für die 60 Plätze lässt das Unternehmen deshalb bis zu 64 Reservierungen zu. Es soll davon ausgegangen werden, dass für jede Fahrt tatsächlich 64 Reservierungen vorgenommen werden. Erscheinen mehr als 60 Personen mit Reservierung zur Fahrt, so können nur 60 von ihnen daran teilnehmen; die übrigen müssen abgewiesen werden.

Vereinfachend soll angenommen werden, dass die Anzahl der Personen mit Reservierung, die zur Fahrt erscheinen, binomialverteilt ist, wobei die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person mit Reservierung nicht zur Fahrt erscheint, 10 % beträgt.

3.1.4 Geben Sie einen Grund dafür an, dass es sich bei dieser Annahme im Sachzusammenhang um eine Vereinfachung handelt. 1 BE

3.1.5 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine Person mit Reservierung abgewiesen werden muss. 3 BE

3.1.6 Für das Unternehmen wäre es hilfreich, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, mindestens eine Person mit Reservierung abweisen zu müssen, kleiner als ein Prozent wäre. Dazu müsste die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person mit Reservierung nicht zur Fahrt erscheint, mindestens einen bestimmten Wert haben. Ermitteln Sie diesen Wert auf ganze Prozent genau. 4 BE

Der Aufgabentext wird auf der folgenden Seite fortgesetzt.

3.2 Für ein Spiel wird ein Glücksrad verwendet, das drei farbige Sektoren hat. Der Tabelle können die Farben der Sektoren und die Größen der zugehörigen Mittelpunktswinkel entnommen werden.

Farbe	Blau	Rot	Grün
Mittelpunktswinkel	180°	120°	60°

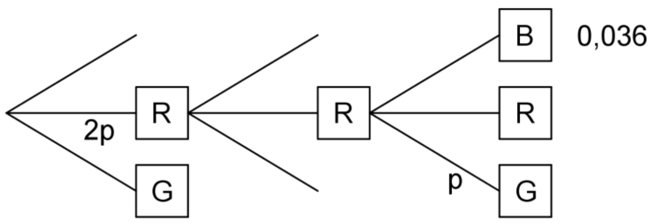
Für einen Einsatz von 5 Euro darf ein Spieler das Glücksrad dreimal drehen. Erzielt der Spieler dreimal die gleiche Farbe, werden ihm 10 Euro ausgezahlt. Erzielt er drei verschiedene Farben, wird ein anderer Betrag ausgezahlt. In allen anderen Fällen erfolgt keine Auszahlung.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dreimal die gleiche Farbe erzielt wird, ist $\frac{1}{6}$.

3.2.1 Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass drei verschiedene Farben erzielt werden, ebenfalls $\frac{1}{6}$ beträgt. 2 BE

3.2.2 Bei dem Spiel ist zu erwarten, dass sich die Einsätze der Spieler und die Auszahlungen auf lange Sicht ausgleichen. Berechnen Sie den Betrag, der ausgezahlt wird, wenn drei verschiedene Farben erscheinen. 3 BE

3.2.3 Die Größen der Sektoren werden geändert. Dabei wird der blaue Sektor vergrößert. Die Abbildung zeigt einen Teil eines Baumdiagramms, das für das geänderte Glücksrad die drei Drehungen beschreibt. Ergänzend ist für einen Pfad die zugehörige Wahrscheinlichkeit angegeben. 5 BE



Bestimmen Sie die Größe des zum blauen Sektor gehörenden Mittelpunktswinkels.