Mecklenburg-Vorpommern

Zentralabitur 2021

Mathematik (WTR)

Leistungskurs

Musterlösung

Aufgabenteil A

Aufgabe	Lösungen	mögliche BE	erteilte BE
1.1	$f'(x) = 4x^3 - 2kx = 2x \cdot 2x^2 - 2x \cdot k = 2x \cdot (2x^2 - k)$	1	
1.2	$f'(x) = 2x \cdot (2x^2 - k) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0$ (entfällt, da lokales Maximum) $2x^2 - k = 0 \quad \Rightarrow x_{2/3} = \pm\sqrt{\frac{k}{2}}$ $f\left(\sqrt{\frac{k}{2}}\right) = \left(\sqrt{\frac{k}{2}}\right)^4 - k \cdot \left(\sqrt{\frac{k}{2}}\right)^2 = \frac{k^2}{4} - \frac{k^2}{2} = -\frac{k^2}{4} = -1 \Leftrightarrow k = 2$ (da $k > 0$)	4	
2.1	$f'(x) = \cos(x)$ $f'(0) = \cos(0) = 1$	1	
2.2	Die beiden Tangenten schließen ein Dreieck mit der Grundseite der Länge π und der Höhe $\frac{\pi}{2}$ ein. Für den Flächeninhalt des Dreiecks ergibt sich: $\frac{\pi \cdot \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi^2}{4}$. Für den Inhalt des gesuchten Flächenstücks ergibt sich: $A = \frac{\pi^2}{4} - \int_0^{\pi} \sin(x)\,dx$ $= \frac{\pi^2}{4} - [-\cos(x)]_0^{\pi}$ $= \frac{\pi^2}{4} - (1-(-1))$ $= \frac{\pi^2}{4} - 2$	4	
3.1	Der Richtungsvektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ verläuft ausschließlich in y-Richtung, da die x- und die z-Koordinate null sind.	1	

3.2	Ein Punkt auf der y-Achse hat die Koordinaten $C(0 \mid y_c \mid 0)$. Für die Richtungsvektoren der Geraden ergibt sich: $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ y_c + 3 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ y_c - 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ Das Skalarprodukt der beiden Richtungsvektoren muss null sein: $\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ y_c + 3 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ y_c - 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 4 + y_c^2 - 9 + 1 = y_c^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow y_c = \pm 2$ Die gesuchten Punkte sind $C_1(0 \mid -2 \mid 0)$ und $C_2(0 \mid 2 \mid 0)$.	4	
4.1	Die Summe der Wahrscheinlichkeiten beträgt 1. Es gilt: $p + 3p + 2p = 6p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{6}$	1	
4.2	Da sich Einsatz und Auszahlung ausgleichen, ist $E(A) = 3$. $E(A) = 0 \cdot \frac{1}{6} + b \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \frac{1}{3} = \frac{b}{2} + 2 = 3 \quad \Rightarrow b = 2$	2	
4.3	Das Gewinnspiel kann mit sechs Kugeln in einer Urne simuliert werden. Eine mögliche Anordnung wäre eine rote Kugel, 3 grüne Kugeln und 2 blaue Kugeln. Für einen Einsatz von 3 € darf eine Kugel gezogen werden. Wird eine rote Kugel gezogen, beträgt der Auszahlungsbetrag 0 €. Beim Ziehen einer grünen Kugel werden 2 € ausgezahlt, bei einer blauen Kugel beträgt der Auszahlungsbetrag 6 €.	2	
5.1	$m = f'(0) = 1$	1	
5.2	Es gilt: $g_c(x) = c \cdot f(x)$ und somit $g'_c(x) = c \cdot f'(x)$. $g_c(0) = c \cdot f(0) = 2c$ und $m_t = c \cdot f'(0) = c$ Als Tangentengleichung erhält man mit $y = m \cdot x + n$ die Gleichung $y = cx + 2c$. Die Berechnung der Nullstelle der Tangenten liefert: $cx + 2c = 0$ $cx = -2c$ $x = -2$	4	
6.1	Man erhält: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{DC}$. Somit sind die Vektoren zweier gegenüberliegender Seiten gleich lang und parallel.	1	

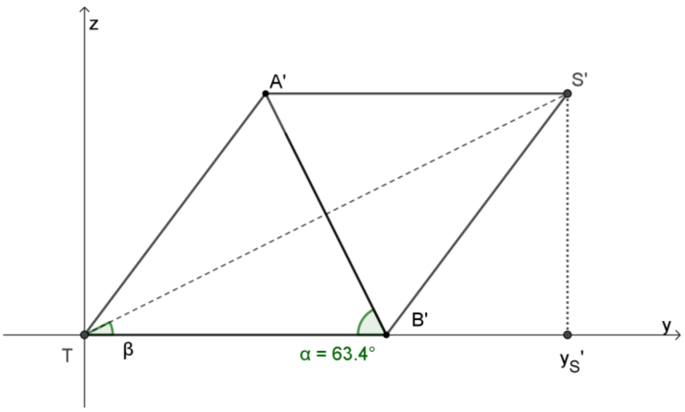
6.2	$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ Für den Vektor $\overrightarrow{TB}$ erhält man $\overrightarrow{TB} = \begin{pmatrix} 3-r \\ 4-7r \\ 1-3r \end{pmatrix}$ Aufgrund des rechten Winkels in Punkt B ist das Skalarprodukt der Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{TB}$ gleich null. $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{TB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3-r \\ 4-7r \\ 1-3r \end{pmatrix} = 26 - 34r = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{13}{17}$ Für das gesuchte Verhältnis ergibt sich somit $13:4$.	4	
7.1	Mit $p_{gelb} = \frac{1}{3}$ ergibt sich: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$	1	
7.2	Die Wahrscheinlichkeit, eine gelbe Kugel zu ziehen, beträgt $\sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$. Bezeichnet man die gesuchte Anzahl der gelben Kugeln mit x, so ergibt sich: $\frac{x+2}{4x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x + 6 = 4x \Leftrightarrow x = 6$ Alternative: $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$, die beiden blauen Kugeln machen somit einen Anteil von $\frac{1}{12}$ aus. Folglich befinden sich jetzt 24 Kugeln in der Urne, von denen sechs (ein Viertel) gelb sind.	4	
	Summe:	**30**	

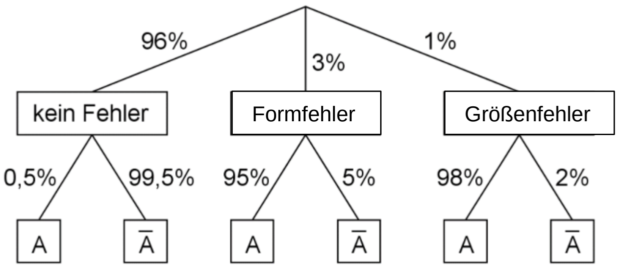
Aufgabenteil B

Aufgabe	Lösungen	mögliche BE	erteilte BE
1.1	Schnittpunkt mit der x-Achse: $f(-x)=f(x)$ $f(-x)=\frac{1}{20}(-x)^4-\frac{2}{5}(-x)^2+1$ $f(-x)=\frac{1}{20}x^4-\frac{2}{5}x^2+1=f(x)$	2	
1.2	$f'(x)=\frac{1}{5}x^3-\frac{4}{5}x,\ \ f''(x)=\frac{3}{5}x^2-\frac{4}{5}$ $f'(x)=0 \Rightarrow 0=\frac{1}{5}x\left(x^2-4\right) \Leftrightarrow x_1=0 \vee x_2=-2 \vee x_3=2$ $f''(0)=-\frac{4}{5}<0 \Rightarrow$ lokales Maximum, $f''(-2)=f''(2)=\frac{8}{5}>0 \Rightarrow$ lokale Minima Höhe: $h=f(0)=1$ (dm) Länge: $l=x_3-x_2=4$ (dm)	5	
1.3	$f(1)=\frac{13}{20},\ f(0)=1,\ f(2)=\frac{1}{5}$ $\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{3}{5}\neq\frac{13}{20}$ $\Rightarrow$ Punkt liegt nicht auf halber Höhe zwischen den angegeben Punkten	3	
1.4	$\frac{\frac{1}{5}-\frac{13}{20}}{2-1}=-\frac{9}{20}$ Der Term gibt den mittleren Anstieg der . oberen Randlinie des rechten Bauteils der Brücke an.	2	
1.5	$f''(x)=\frac{3}{5}x^2-\frac{4}{5}$ $f''(x)=0 \Rightarrow 0=\frac{3}{5}x^2-\frac{4}{5} \Leftrightarrow x_1=\frac{2}{3}\sqrt{3} \vee x_2=-\frac{2}{3}\sqrt{3}$ a. $f'\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)=\frac{16}{45}\sqrt{3}\approx 0{,}616$ $\Rightarrow \tan\alpha=0{,}616 \Leftrightarrow \alpha\approx 31{,}6°$	5	
1.6.1	$0{,}8-a\cdot x^2=0 \Leftrightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{\frac{0{,}8}{a}}$ $\sqrt{\frac{0{,}8}{a}}\leq 0{,}9 \Leftrightarrow 0{,}8\leq 0{,}81\cdot a \Leftrightarrow a\geq\frac{80}{81}$	4	
1.6.2	Je größer der Wert von a, umso schmaler wird die Durchfahrt unter der Brücke. Für zu große Werte von a können keine Züge mehr durchfahren.	2	

1.6.3	Nullstellen von q: $x_{N1/2} = \pm\sqrt{\frac{0,8}{1,25}} = \pm 0,8$ $V = 2\left(\int_0^1 \left(\frac{1}{20}x^4 - \frac{2}{5}x^2 + 1\right)dx - \int_0^{0,8} (0,8 - 1,25 \cdot x^2)dx\right)$ $V = 2\cdot\left(\left[\frac{1}{100}x^5 - \frac{2}{15}x^3 + x\right]_0^1 - \left[0,8x - \frac{5}{12}x^3\right]_0^{0,8}\right)$ $v = 2\cdot\left(\frac{263}{300} - \frac{32}{75}\right) = \frac{9}{10}$ Masse $m = 0,9\,dm^2 \cdot 0,4\,dm \cdot 800\frac{g}{dm^3} = 288\,g$	7	
1.7	I Die Aussage ist falsch, denn sie beschreibt eine Punktsymmetrie der Graphen bzgl. des Koordinatenursprungs. II Die Aussage ist wahr, denn $g_r(-x+1) = g_r(-(x-1))$ $g_r(-(x-1)) = g_l(x-1) \Rightarrow$ Achsensymmetrie der Graphen zur $y-$Achse	4	
1.8.1	Da eine Symmetrie bzgl. der Wendepunkte vorliegt, können alle 3 Teile jeweils aus einem Drittel des Holzblocks gesägt werden.	2	
1.8.2	$k(x) = \frac{3}{5}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) + \frac{4}{5}$ Periodenlänge: $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$ Wendestelle $x_{W1} = \frac{3}{2}$ Breite des Holzblocks: $b = \frac{3}{2}\cdot 6 = 9\ (dm)$ Höhe des Holzblocks: $h = 2\cdot k(x_{W1}) = 2\cdot k\left(\frac{3}{2}\right) = 1,6\ (dm)$ $A = 9dm \cdot 1,6dm = 14,4\,dm^2$	4	
	Summe:	**40**	

Aufgabe	Lösungen	mögliche BE	erteilte BE
2.1	$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}0\\10\\0\end{pmatrix}, \overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}-10\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \lvert\overrightarrow{AB}\rvert=\lvert\overrightarrow{BC}\rvert=10 \Rightarrow \triangle ABC$ ist gleichschenklig	2	
2.2	$\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}0\\10\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-10\\0\\0\end{pmatrix}=0 \Rightarrow$ rechter Winkel bei B $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}5\\-5\\12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-10\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-5\\12\end{pmatrix} \Rightarrow D(-5\mid-5\mid12)$	3	
2.3	$\vec{n}_E=\overrightarrow{BT}\times\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}-5\\-5\\-12\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-10\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\120\\-50\end{pmatrix}$ $120y-50z+d=0$ mit $T(0\mid0\mid0)\in E \Rightarrow d=0$ $\Rightarrow 12y-5z=0$	3	
2.4	$\cos\alpha=\dfrac{\begin{pmatrix}0\\12\\-5\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\left\lvert\begin{pmatrix}0\\12\\-5\end{pmatrix}\right\rvert\cdot\left\lvert\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rvert} \Rightarrow \alpha\approx112{,}6°$. $\Rightarrow$ eingeschlossener Winkel $\beta=180°-\alpha\approx67{,}4°$ oder $\tan\beta=\dfrac{\frac{1}{2}\lvert\overrightarrow{ST}\rvert}{\frac{1}{2}\lvert\overrightarrow{AB}\rvert}=\dfrac{12}{5} \Rightarrow \beta\approx67{,}4°$	3	
2.5.1	$g_{BC}:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}5\\5\\12\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-10\\0\\0\end{pmatrix}$, $\overline{BC}\in g_{BC}$, da B und $C\in E \Rightarrow \overline{BC}\in E$ $5k-5\cdot12=5k-60 \Rightarrow$ w.A. $\Rightarrow g_{BC}\in E_k$ $\overline{BC}\in E \wedge \overline{BC}\in E_k \Rightarrow \overline{BC}$ liegt auf der Schnittgeraden	2	
2.5.2	$E_k: k\cdot y-5z=5k-60$ hat mindestens einen Punkt mit $\triangle ADS$ gemeinsam: • für $S(0\mid0\mid24)\in E_k \Rightarrow k\cdot0-120=5k-60 \Rightarrow k=-12$ • für E_k mit $z=12 \Rightarrow k\cdot0-5z=5k-60 \Rightarrow z=-k+12 \Rightarrow k=0$ $\Rightarrow -12\le k\le0$	4	

2.5.3	$E_{-12} = E_{BCS}$, $E_{-12} \parallel E_{ADT} \Rightarrow -12 \cdot y - 5z = -120 \Rightarrow \overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{n_F} \circ \overrightarrow{n_{E_k}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ -5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ -5 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -12k + 25 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{25}{12}$	4	
2.6	 $\cos\beta = \frac{y_{S'}}{24} \Rightarrow y_{S'} = 24 \cdot \cos(90° - 63{,}4°)$ $y_{S'} \approx 22{,}2$	4	
	Summe:	**25**	

Aufgabe	Lösungen	mögliche BE	erteilte BE
3.1	Sei X die Anzahl der Fehlerhaften Kugeln. Laut Aufgabenstellung ist X binomialverteilt, und zwar mit $n = 800$ und $p = 0,04$. $P(X < 30) = B_{800;\,0,04}(0 \le X \le 29) \approx 0,3341$	2	
3.2	$E(X) = n \cdot p = 800 \cdot 0,04 = 32$, $\frac{1}{2}\sigma(X) = \frac{1}{2}\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \frac{1}{2}\sqrt{800 \cdot 0,04 \cdot 0,96} \approx 2,8$ $P\left(E(X) - \frac{1}{2}\sigma(X) \le X \le E(X) + \frac{1}{2}\sigma(X)\right) = B_{800;\,0,04}(30 \le X \le 34) \approx 0,3478$	5	
3.3.1	A: „Eine Kugel wird aussortiert.“ 	4	
3.3.2	$P(\text{aussortierte Kugel ohne Formfehler})$ $= \frac{0,96 \cdot 0,005 + 0,01 \cdot 0,98}{0,96 \cdot 0,005 + 0,03 \cdot 0,95 + 0,01 \cdot 0,98} \approx 0,3387$	3	
3.4.1	$\bar{x} = \frac{2,00g + 2,02g + 2,00g + 1,98g + 2,02g}{5} = 2,002g$	1	
3.4.2	Die Abweichung vom Mittelwert kann bei Packung 2 größer sein, z.B. könnte in Packung 2 eine Kugel mit Größenfehler enthalten sein.	3	
3.4.3	$d_{\bar{x}} = \frac{\lvert 2,002g - 2g\rvert + \lvert 2,002g - 2,01g\rvert + \lvert 2,002g - 2,00g\rvert + \lvert 2,002g - 1,98g\rvert + \lvert 2,002g - 2,02g\rvert}{5}$ $d_{\bar{x}} = \frac{0,052g}{5} = 0,0104g$ $d_{\bar{x}}$ gibt die durchschnittliche Abweichung vom Mittelwert $\bar{x}$ an, d.h. $\bar{x} \pm d_{\bar{x}}$	3	
3.4.4	$\frac{\bar{x} - x_1 + \bar{x} - x_2 + \bar{x} - x_3 + \ldots + \bar{x} - x_n}{n}$ $= \frac{n \cdot \bar{x} - (x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n)}{n}$ $= \bar{x} - \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$ $= \bar{x} - \bar{x} = 0$ Der Term hat stets den Wert 0 und ist somit als Streuungsmaß ungeeignet.	4	
	Summe:	**25**	