Mecklenburg-Vorpommern

Zentralabitur 2021

Mathematik

Leistungskurs

Prüfungsteil A – hilfsmittelfreie Aufgaben

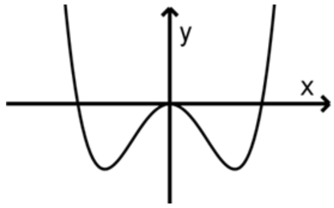
Name, Vorname: ______________________________

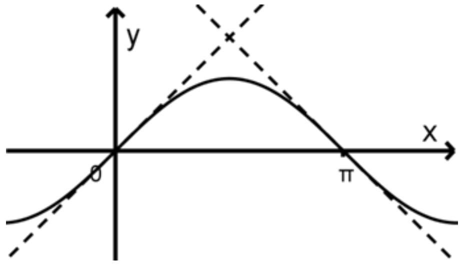
Arbeitsblatt

Dieses Arbeitsblatt ist ohne Zuhilfenahme von Tafelwerk oder Taschenrechner zu bearbeiten. Zusätzliche Lösungsblätter sind mit Ihrem Namen zu versehen und in dieses Arbeitsblatt einzulegen.

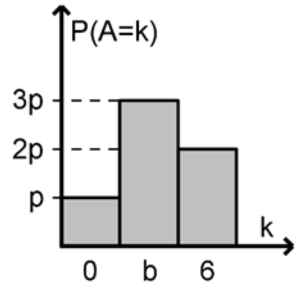
Für dieses Arbeitsblatt beträgt die Bearbeitungszeit maximal 100 Minuten.

Zu bearbeiten sind die **vier** Pflichtaufgaben sowie **zwei** der drei Wahlaufgaben.

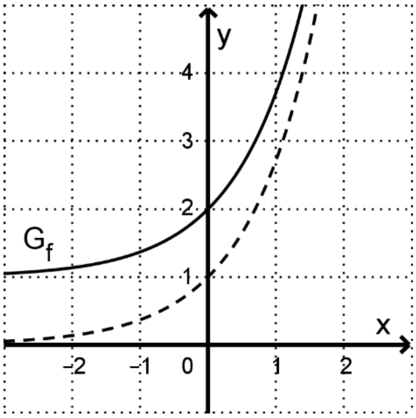
1 Analysis – Pflichtaufgabe	BE
Gegeben ist eine in IR definierte Funktion f mit $f(x) = x^4 - k \cdot x^2$, wobei k eine positive reelle Zahl ist. Die Abbildung zeigt den Graphen von f. 	
1.1 Zeigen Sie, dass $f'(x) = 2x \cdot (2x^2 - k)$ eine Gleichung der ersten Ableitungsfunktion von f ist.	1
1.2 Die beiden Tiefpunkte des Graphen von f haben jeweils die y-Koordinate -1. Ermitteln Sie den Wert von k.	4

2 Analysis – Pflichtaufgabe	BE
Gegeben ist die in IR definierte Funktion f mit $f(x)=\sin x$. Die Abbildung zeigt den Graphen G_f von f sowie die Tangenten an G_f in den dargestellten Schnittpunkten mit der x-Achse. 	
2.1 Zeigen Sie, dass diejenige der beiden Tangenten, die durch den Koordinatenursprung verläuft, die Steigung 1 hat.	1
2.2 Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das von G_f und den beiden Tangenten eingeschlossen wird.	4

3 **Analytische Geometrie – Pflichtaufgabe**	BE
Gegeben sind die Punkte $A(2\mid -3\mid 1)$ und $B(2\mid 3\mid 1)$.	
3.1 Begründen Sie, dass die Gerade durch A und B parallel zur y-Achse verläuft.	1
3.2 Der Punkt C liegt auf der y-Achse. Die Gerade durch A und C steht senkrecht zur Gerade durch B und C. Bestimmen Sie die Koordinaten aller Punkte, die die beschriebenen Eigenschaften des Punkts C haben.	4

4 Stochastik – Pflichtaufgabe	BE
Bei einem Gewinnspiel beträgt der Einsatz für die Teilnahme 3 Euro. Die Auszahlung in Euro wird durch die Zufallsgröße A beschrieben. Die Abbildung zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von A. 	
4.1 Zeigen Sie, dass p den Wert $\frac{1}{6}$ hat.	1
4.2 Bei wiederholter Durchführung des Spiels ist zu erwarten, dass sich auf lange Sicht Einsätze und Auszahlungen ausgleichen. Berechnen Sie den Wert von b.	2
4.3 Beschreiben Sie, wie das Gewinnspiel unter Verwendung eines Behälters sowie roter, grüner und blauer Kugeln durchgeführt werden könnte.	2

Von den folgenden drei Wahlaufgaben sind **zwei** zu bearbeiten.

5 Analysis – Wahlaufgabe	BE
Die Abbildung zeigt den Graphen G_f einer in IR definierten Funktion f sowie den Graphen der ersten Ableitungsfunktion von f. 	
5.1 Geben Sie die Steigung der Tangente an G_f im Punkt $(0 \mid f(0))$ an.	1
5.2 Betrachtet wird die Schar der Funktionen g_c mit $c \in \mathbb{R}^+$. Der Graph von g_c geht aus G_f durch Streckung mit dem Faktor c in y-Richtung hervor. Die Tangente an den Graphen von g_c im Punkt $(0 \mid g_c(0))$ schneidet die x-Achse. Bestimmen Sie rechnerisch die x-Koordinate des Schnittpunkts.	4

6 **Analytische Geometrie – Wahlaufgabe**	BE
Gegeben sind die Punkte $A(0\|0\|0)$, $B(3\|4\|1)$, $C(1\|7\|3)$ und $D(-2\|3\|2)$.	
6.1 Weisen Sie nach, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist.	1
6.2 Der Punkt T liegt auf der Stecke $\overline{AC}$. Das Dreieck ABT hat bei B einen rechten Winkel. Ermitteln Sie das Verhältnis der Länge der Strecke $\overline{AT}$ zur Länge der Strecke $\overline{CT}$.	4

7	**Stochastik – Wahlaufgabe**	BE
In einem Behälter befinden sich Kugeln, von denen jede dritte gelb ist.		
7.1	Aus dem Behälter wird zweimal nacheinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Kugeln gelb sind.	1
7.2	Im Behälter werden zwei gelbe Kugeln durch zwei blaue Kugeln ersetzt. Anschließend wird aus dem Behälter erneut zweimal nacheinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Kugeln gelb sind, beträgt nun $\frac{1}{16}$. Ermitteln Sie, wie viele gelbe Kugeln sich nach den beschriebenen Vorgängen im Behälter befinden.	4

Mecklenburg-Vorpommern

Zentralabitur 2021

Mathematik (WTR)

Leistungskurs

Prüfungsteil B – komplexe Aufgaben

1 Analysis

Die Abbildung 1 zeigt modellhaft den Längsschnitt einer dreiteiligen Brücke aus Holz für eine Spielzeugeisenbahn. Die Züge können sowohl über die Brücke fahren als auch darunter hindurch.

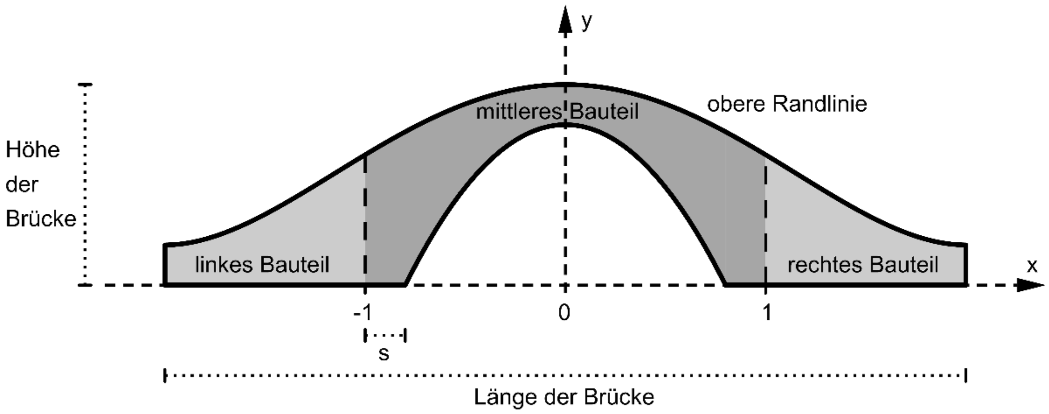


Abbildung 1

Die obere Randlinie des Längsschnitts der Brücke kann mithilfe des Graphen der in IR definierten Funktion $f(x)=\frac{1}{20}x^4-\frac{2}{5}x^2+1$ beschrieben werden. Dabei werden die Endpunkte dieser Randlinie durch die beiden Tiefpunkte des Graphen von f dargestellt. Im verwendeten Koordinatensystem beschreibt die x-Achse die Horizontale; eine Längeneinheit entspricht einem Dezimeter in der Realität.

1.1 Zeigen Sie rechnerisch, dass die obere Randlinie achsensymmetrisch ist. 2 BE

1.2 Bestimmen Sie rechnerisch die Höhe und die Länge der Brücke. 5 BE

(zur Kontrolle: Ein Tiefpunkt des Graphen von f hat die x-Koordinate 2.)

1.3 Betrachtet wird derjenige Punkt der oberen Randlinie, der sich am Übergang vom mittleren zum rechten Bauteil befindet. 3 BE

Prüfen Sie, ob dieser Punkt auf halber Höhe zwischen dem höchsten Punkt der oberen Randlinie und deren rechtem Endpunkt liegt.

1.4 Geben Sie die Bedeutung des Terms $\frac{f(2)-f(1)}{2-1}$ im Sachzusammenhang an und berechnen Sie seinen Wert. 2 BE

Der Aufgabentext wird auf der folgenden Seite fortgesetzt.

1.5 Berechnen Sie die Größe des größten Steigungswinkels der Brücke, der beim Überfahren zu überwinden ist. 5 BE

1.6 Der parabelförmige Teil der unteren Randlinie des Längsschnitts der Brücke kann mithilfe des Graphen einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $q(x) = 0{,}8 - a \cdot x^2$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ beschrieben werden.

1.6.1 In der Abbildung 1 ist die Länge einer der beiden Bodenflächen des mittleren Bauteils mit s bezeichnet. 4 BE
Bestimmen Sie alle Werte von a, die für diese Länge mindestens 0,1 dm liefern.

1.6.2 Begründen Sie im Sachzusammenhang, dass für die Beschreibung der unteren Randlinie beliebig große Werte von a nicht infrage kommen. 2 BE

1.6.3 Für die Brücke gilt $a = 1{,}25$. Die drei Bauteile der Brücke werden aus massivem Holz hergestellt; $1\,\text{dm}^3$ des Holzes hat eine Masse von 800 Gramm. Die Brücke ist 0,4 dm breit. Ermitteln Sie die Masse des mittleren Bauteils. 7 BE

1.7 Während der Planung der Brückenform kamen zur Beschreibung der oberen Randlinie für das linke Bauteil eine Funktion g_ℓ und für das rechte Bauteil eine Funktion g_r infrage. Auch bei Verwendung dieser Funktionen wäre die obere Randlinie achsensymmetrisch gewesen. 4 BE
Beurteilen Sie jede der folgenden Aussagen:

I $-g_\ell(x) = g_r(-x)$ für $-2 \le x \le -1$

II $g_\ell(x-1) = g_r(-x+1)$ für $-1 \le x \le 0$

Der Aufgabentext wird auf der folgenden Seite fortgesetzt.

1.8 Die Form und die Größe der Brücke werden verändert, indem im bisher verwendeten Modell die obere Randlinie des Längsschnitts mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $k(x)=\frac{3}{5}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)+\frac{4}{5}$ beschrieben wird. Die Bauteile der veränderten Brücke lassen sich nach dem in der Abbildung 2 dargestellten Prinzip aus einem quaderförmigen Holzblock sägen. Der beim Sägen auftretende Materialverlust soll im Folgenden vernachlässigt werden.

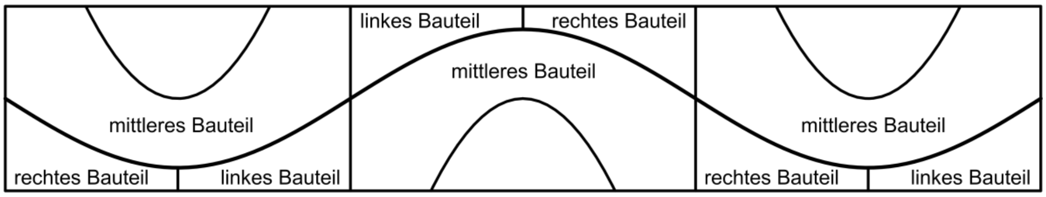


Abbildung 2

1.8.1 Der Graph von k ist symmetrisch bezüglich jedes seiner Wendepunkte. Beschreiben Sie, wie diese Eigenschaft mit dem in der Abbildung 2 dargestellten Prinzip zusammenhängt. 2 BE

1.8.2 Ermitteln Sie mithilfe des Funktionsterms von k den Flächeninhalt der gesamten in der Abbildung 2 gezeigten rechteckigen Vorderseite des Holzblocks. 4 BE

2 Analytische Geometrie

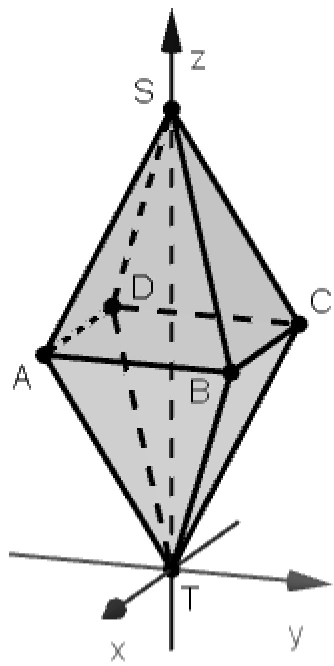
Gegeben sind die Punkte $A(5|-5|12)$, $B(5|5|12)$ und $C(-5|5|12)$.

2.1 Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist. 2 BE

2.2 Begründen Sie, dass A, B und C Eckpunkte eines Quadrats sein können, und geben Sie die Koordinaten des vierten Eckpunkts D dieses Quadrats an. 3 BE

Im Folgenden wird die abgebildete Doppelpyramide betrachtet. Die beiden Teilpyramiden ABCDS und ABCDT sind gleich hoch. Der Punkt T liegt im Koordinatenursprung, der Punkt S ebenfalls auf der z-Achse.

Die Seitenfläche BCT liegt in einer Ebene E.



2.3 Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform. 3 BE

(zur Kontrolle: $12y-5z=0$)

2.4 Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den die Seitenfläche BCT mit der Fläche ABCD einschließt. 3 BE

2.5 E gehört zur Schar der Ebenen $E_k:\ k\cdot y-5z=5k-60$ mit $k\in\mathbb{R}$.

2.5.1 Alle Ebenen der Schar schneiden sich in einer Gerade. Weisen Sie nach, dass die Kante $\overline{BC}$ auf dieser Gerade liegt. 2 BE

2.5.2 Ermitteln Sie diejenigen Werte von k, für die E_k mit der Seitenfläche ADS mindestens einen Punkt gemeinsam hat. 4 BE

2.5.3 Die Seitenfläche ADT liegt in der Ebene F. 4 BE

Geben Sie einen Normalenvektor von F an und begründen Sie Ihre Angabe, ohne die Koordinaten von A und D zu verwenden. Bestimmen Sie denjenigen Wert von k, für den E_k senkrecht zu F steht.

2.6 Die Doppelpyramide wird so um die x-Achse gedreht, dass die bisher mit BCT bezeichnete Seitenfläche in der xy-Ebene liegt und der bisher mit S bezeichnete Punkt eine positive y-Koordinate hat. 4 BE
Bestimmen Sie diese y-Koordinate und veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen durch eine Skizze.

3 Stochastik

Ein Unternehmen produziert Stahlkugeln für Kugellager. Erfahrungsgemäß sind 4 % aller Kugeln fehlerhaft. 800 Kugeln werden zufällig ausgewählt. Die Anzahl der fehlerhaften Kugeln unter den ausgewählten kann durch eine binomialverteilte Zufallsgröße beschrieben werden.

3.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den ausgewählten Kugeln weniger als 30 fehlerhaft sind. 2 BE

3.2 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der fehlerhaften Kugeln unter den ausgewählten höchstens um eine halbe Standardabweichung vom Erwartungswert dieser Anzahl abweicht. 5 BE

3.3 Eine fehlerhafte Kugel hat entweder einen Formfehler oder einen Größenfehler. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Kugel einen Formfehler hat, beträgt 3 %. Alle Kugeln werden vor dem Verpacken geprüft. Dabei werden 95 % der Kugeln mit Formfehler, 98 % der Kugeln mit Größenfehler, aber auch 0,5 % der Kugeln ohne Fehler aussortiert.

3.3.1 Stellen Sie den Sachzusammenhang in einem beschrifteten Baumdiagramm dar. 4 BE

3.3.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine aussortierte Kugel keinen Formfehler hat. 3 BE

3.4 Die Masse der hergestellten Kugeln hat einen Sollwert von 2 g pro Stück. Produktionsbedingt streut die Masse der Kugeln geringfügig um den Sollwert. Kugeln mit Formfehler und fehlerlose Kugeln haben keine Masseabweichung. Weicht die Masse der Kugel um mehr als 5 % vom Sollwert ab, so liegt ein Größenfehler vor.

Es werden Packungen mit je fünf Kugeln ausgeliefert. Die Kugeln von zwei zufällig ausgewählten Packungen wurden bezüglich ihrer Masse untersucht und die Messwerte notiert.

Packung	Kugel 1	Kugel 2	Kugel 3	Kugel 4	Kugel 5
1	2,00 g	2,01 g	2,00 g	1,98 g	2,02 g

3.4.1 Bestimmen Sie für die Masse der Kugeln von Packung 1 das arithmetische Mittel $\bar{x}$. 1 BE

3.4.2 Das arithmetische Mittel der Kugelmassen einer weiteren Packung 2 stimmt mit dem der Kugelmassen der Packung 1 überein. Die Standardabweichung der Kugelmassen der Packung 2 ist größer als die von Packung 1. 3 BE

Treffen Sie eine Aussage über die Massen der Kugeln aus Packung 1 im Vergleich zu denen der Packung 2. Begründen Sie Ihre Aussage.

Der Aufgabentext wird auf der folgenden Seite fortgesetzt.

3.4.3 Die mittlere Abweichung $d_{\bar{x}}$ ist ein weiteres Streuungsmaß und kann mit der Gleichung 3 BE

$$d_{\bar{x}} = \frac{\left|\bar{x} - x_1\right| + \left|\bar{x} - x_2\right| + \ldots + \left|\bar{x} - x_n\right|}{n}, \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$$ berechnet werden.

Berechnen Sie $d_{\bar{x}}$ für die Kugelpackung 1.

Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

3.4.4 Betrachtet wird eine beliebige Messreihe mit den Ergebnissen x_1 bis x_n und dem arithmetischen Mittel $\bar{x}$. 4 BE

Bestimmen Sie den Wert des Terms $\frac{\bar{x} - x_1 + \bar{x} - x_2 + \ldots + \bar{x} - x_n}{n}$, $n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$.

Begründen Sie, dass der Wert dieses Terms als Streuungsmaß ungeeignet ist.