Mecklenburg-Vorpommern

Zentralabitur 2021

Mathematik (WTR)

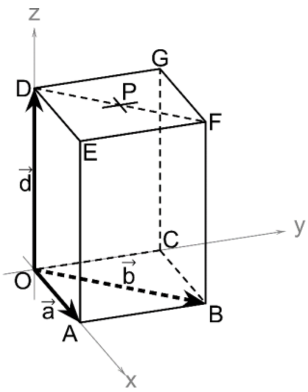
Grundkurs

Musterlösung

Aufgabenteil A

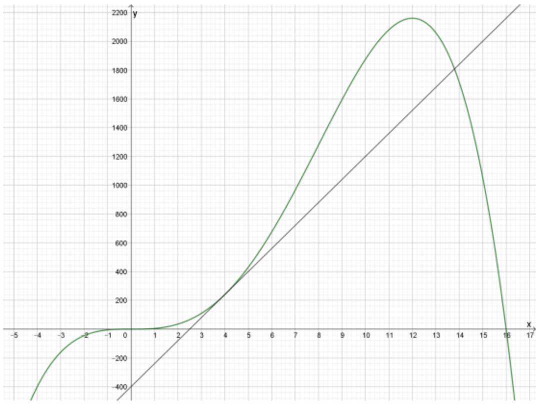
Aufgabe	Lösungen	mögliche BE	erteilte BE
1.1	Die Graphen II und III kommen nicht in Frage. Begründung: Es gilt $f(0{,}5)<0$. Graph II besitzt an der Stelle $x=0{,}5$ jedoch einen positiven Funktionswert. Der Graph der Ableitungsfunktion $f'(x)=3x^2-1$ besitzt keine konstanten Abschnitte. Somit kann auch Graph III aufgrund seines linearen Verlaufs ausgeschlossen werden.	2	
1.2	$f(x)=0$ $x^3-x=x(x^2-1)=0 \quad \Rightarrow x_1=-1;\ x_2=0;\ x_3=1$ Aufgrund der Punktsymmetrie gilt: $A=2\cdot\left\lvert\int_{-1}^{0} f(x)\,dx\right\rvert$ $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}$ $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx=(0-0)-\left(\frac{1}{4}\cdot(-1)^4-\frac{1}{2}\cdot(-1)^2\right)$ $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx=\frac{1}{4}$ $A=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$	3	
2.1	Durch Ablesen der Funktionswerte erhält man: $F(-5)\approx-1{,}3$ und $F(1)\approx 1{,}7$ Es gilt: $\int_{1}^{5} f(x)\,dx=F(5)-F(1)=-1{,}3-(-1{,}7)=-3$.	2	
2.2	Ein Kästchen mit der Seitenlänge 0,5 hat einen Flächeninhalt von 0,25. Die Anzahl dieser Kästchen in der Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse im Intervall $1<x<5$ kann durch Auszählen bestimmt werden und muss mit 0,25 multipliziert werden. Da die Fläche unterhalb der x-Achse liegt, ist das Ergebnis negativ.	3	
3.1	$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-3\\4\\5-a\end{pmatrix}$ $\left\lvert\overrightarrow{AB}\right\rvert=\sqrt{(-3)^2+4^2+(5-a)^2}=\sqrt{a^2-10a+50}=5$ $a^2-10a+25=0 \Leftrightarrow a=5$	3	
3.2	Benötigt werden die Vektoren $\overrightarrow{OB}$ und $\overrightarrow{AB}$. Das Skalarprodukt der Vektoren muss null ergeben.	2	

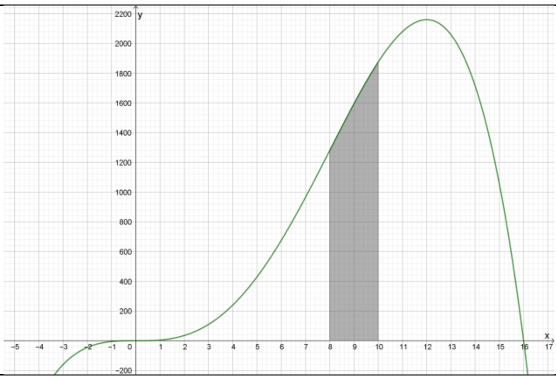
	$\overrightarrow{OB} \circ \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5-a \end{pmatrix} = -6 + 16 + 25 - 5a = 35 - 5a$ $35 - 5a = 0 \Rightarrow a = 7$		
4.1	Die Wahrscheinlichkeit, dass keine 6 fällt, beträgt $\frac{5}{6}$. Somit ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit, dass in zwei Würfen keine sechs fällt: $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$.	2	
4.2	Abbildung 1 zeigt nicht die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X, da die höchste Säule für $X = 20$ nicht mit dem Erwartungswert von 25 übereinstimmt. Abbildung 2 zeigt nicht die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X, da die Summe aller Werte einer Wahrscheinlichkeitsverteilung 1 ergibt. Für Abbildung 2 erhält man: $P(X=23)+P(X=24)+P(X=25)+P(X=26)+P(X=27)>1$ Abbildung 3 zeigt nicht die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X, da $n = 36$ und in dieser Abbildung auch die Wahrscheinlichkeit für $X = 40$ größer als null ist.	3	
5.1	Der Funktionsterm weist nur ungerade Exponenten auf. Demzufolge handelt es sich um eine ungerade Funktion und diese sind punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung. Alternativ kann die Punktsymmetrie anhand des Funktionsterms nachgewiesen werden: $-f(-x) = -\left(-(-x)^5 + 2\cdot(-x)^3 + (-x)\right) = -\left(x^5 - 2x^3 - x\right) = -x^5 + 2x^3 + x = f(x)$	1	
5.2	$f(x) = 0$ $0 = x \cdot (-x^4 + 2x^2 + 1) \quad \vert x$ ausgeklammert $\Rightarrow \quad x_1 = 0$ Es gibt somit mindestens eine Nullstelle $x_1 = 0$. Alternativ kann mit dem Verhalten einer ganzrationalen Funktion fünften Grades im Unendlichen argumentiert werden: Der Graph ist stetig und verläuft vom positiven Unendlichen ins negative Unendliche. Dabei wird mindestens einmal die x-Achse geschnitten.	1	

5.3	Für die erste Ableitungsfunktion erhält man $f'(x) = -5x^4 + 6x^2 + 1$. Durch die Auswahl geeigneter Stellen erhält man: $f'(0) = 1$ und $f'(2) = -55$. Da die Funktion $f'(x)$ stetig ist, befindet sich im Intervall $0 < x < 2$ eine Nullstelle (notwendige Bedingung) der Ableitungsfunktion mit Vorzeichenwechsel (hinreichende Bedingung).	3	
6.1	Der Punkt ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{OC}$. $\vec{b} - \vec{a}$ liefert den Vektor $\overrightarrow{OC}$. Der Faktor $\frac{1}{2}$ halbiert die Länge dieses Vektors.	1	
6.2	 	1	
6.3	$\vec{b} \circ \overrightarrow{OP} = \vec{b} \circ \left(\frac{1}{2}\vec{b} + \vec{d}\right) = \frac{1}{2}\vec{b} \circ \vec{b} + \underbrace{\vec{b} \circ \vec{d}}_{=0} = \frac{1}{2}\vec{b} \circ \vec{b} = \frac{1}{2}\left\|\vec{b}\right\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cdot \cos 0^\circ = \frac{1}{2}\left\|\vec{b}\right\|^2$ Da $\left\|\vec{b}\right\| = \sqrt{\left\|\vec{a}\right\|^2 + \left\|\vec{a}\right\|^2} = \sqrt{2} \cdot \left\|\vec{a}\right\|$ ist, ist der Term $\vec{b} \circ \overrightarrow{OP}$ nur von der Seitenlänge der Grundfläche abhängig.	3	
7.1	$P(X=3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$	2	
7.2	Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist symmetrisch, da $p = 0{,}5$. Daraus folgt: $P(Y \le 13) = 0{,}5$ und $P(Y=15) = P(Y=12) \approx 0{,}13$ $P(Y=14) = P(Y \le 15) - P(Y=15) - P(Y \le 13)$ $\approx 0{,}78 - 0{,}13 - 0{,}5 = 0{,}15$	3	
	Summe:	**25**	

Aufgabenteil B

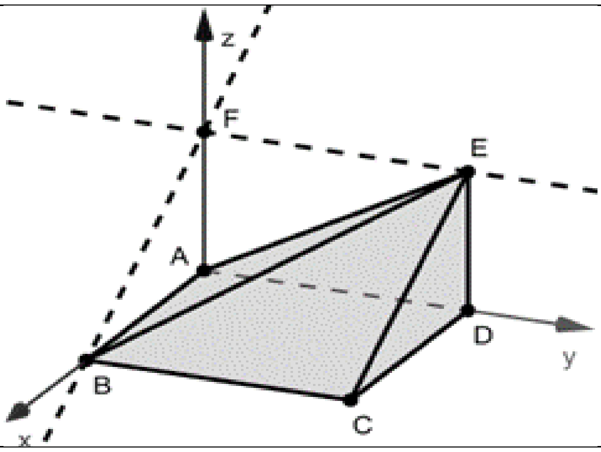
1 Analysis

Aufgabe	Lösungen	mögliche BE	erteilte BE
1.1	$f'(x) = -\frac{5}{4}x^3 + 15x^2,\ f''(x) = -\frac{15}{4}x^2 + 30x$ $0 = -\frac{5}{4}x^3 + 15x^2 \Leftrightarrow x_{1/2} = 0 \vee x_3 = 12,\ f''(12) = -180 < 0 \Rightarrow$ lokales Maximum $f(12) = 2160$ $f'(0) = 0 \Rightarrow$ Tangente an den Graphen von f verläuft parallel zur x – Achse	5	
1.2	$f'''(x) = -\frac{15}{2}x + 30$ $f''(x) = 0,\ 0 = -\frac{15}{4}x^2 + 30x \Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 8,\ f'''(0) = 30 \neq 0,\ f'''(8) = -30 \neq 0$ $W_1(0\|0),\ W_2(8\|1280)$ $m = \frac{1280-0}{8-0} = 160 \Rightarrow g(x) = 160x$ 	7	
1.3.1	$h_3(x) = 15x^2,\ h_4(x) = 20x^2$ Streckung des Graphen von h_3 in y – Richtung mit dem Faktor $\frac{4}{3}$	2	
1.3.2	$f(4) = 240,\ h_a(4) = 240 \Rightarrow 80a = 240 \Leftrightarrow a = 3$	2	
1.3.3	$f(x) = h_a(x),$ $-\frac{5}{16}x^4 + 5x^3 = 5ax^2$ $-\frac{5}{16}x^2\left(x^2 - 16x + 16a\right) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_{2/3} = 8 \pm \sqrt{64-16a}$ $\Rightarrow$ Es gibt genau zwei gemeinsame Punkte für $64 - 16a = 0 \Leftrightarrow a = 4.$	5	
1.3.4	Die Graphen haben im Intervall $0 \le x \le 10$ genau drei Schnittstellen und schließen damit zwei Flächenstücke ein, die den gleichen Flächeninhalt haben. Dabei liegt für ein Flächenstück der Graph von f oberhalb vom Graphen $h_{3,75}$ und beim anderen unterhalb.	3	

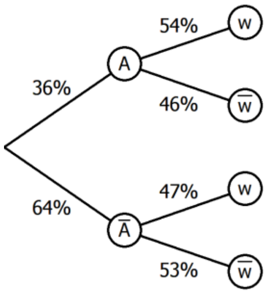
1.4.1	4 Stunden nach Beobachtungsbeginn beträgt die momentane Änderungsrate $240\frac{\text{kg}}{\text{h}}$.	2	
1.4.2	Die Aussage ist falsch. Auch 12 Stunden nach Beobachtungsbeginn ist die momentane Änderungsrate positiv, d.h. der Tankinhalt wächst nach 12 Stunden zunächst weiter.	2	
1.4.3	 Der Tankinhalt nimmt um etwa $8\cdot 2\cdot 200\,\text{kg}=3200\,\text{kg}$ zu.	3	
1.4.4	$\int_0^{20}\left(-\frac{5}{16}x^4+5x^3\right)dx=\left[-\frac{1}{16}x^5+\frac{5}{4}x^4\right]_0^{20}=0\Rightarrow$ Der Tankinhalt beträgt 1200kg.	4	
	Summe:	**35**	

2 Analytische Geometrie

Aufgabe	Lösungen	mögliche BE	erteilte BE
2.1	Aus der Zeichnung kann man vermuten, dass der rechte Winkel bei C liegt. $\overrightarrow{CB}=\begin{pmatrix}0\\-10\\0\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{CE}=\begin{pmatrix}-10\\0\\6\end{pmatrix}$ Man erhält $\overrightarrow{CB}\circ\overrightarrow{CE}=0$, also stehen $\overline{CB}$ und $\overline{CE}$ senkrecht aufeinander und ΔBCE hat einen rechten Winkel bei C. Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat der Seitenlänge 10 und ΔCDE hat einen rechten Winkel bei D. Da der Körper eine Symmetrieebene besitzt, sind die Dreiecke ΔABE und ΔBCE sowie ΔDAE und ΔCDE jeweils kongruent zueinander. Demzufolge gilt: $A_O=A_{ABCD}+2\cdot A_{BCE}+2\cdot A_{CDE}=10^2+2\cdot\frac{10\cdot\lvert\overrightarrow{CE}\rvert}{2}+2\cdot\frac{10\cdot\lvert\overrightarrow{DE}\rvert}{2}\approx 277$. Der Holzkörper hat also eine Oberfläche von ca. 277 cm².	5	
2.2	$\vec{x}=\begin{pmatrix}10\\10\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\-10\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-10\\0\\6\end{pmatrix}\Rightarrow \begin{matrix}x=10-10s\\y=10-10r\\z=6s\end{matrix}\Rightarrow L:\ 3x+5z-30=0$ oder $\begin{pmatrix}0\\-10\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-10\\0\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-60\\0\\-100\end{pmatrix}$ $\Rightarrow -60\cdot10-100\cdot0+d=0\Rightarrow d=600\Rightarrow L:\ 3x+5z-30=0$	3	
2.3	Weil $\overline{BC}$ zur Grundfläche und zur Seitenfläche gehört und wegen $\overline{CE}\perp\overline{CB}$ sowie $\overline{CD}\perp\overline{CB}$ ist der Winkel zwischen den gesuchten Flächen der Winkel zwischen $\overline{CE}$ und $\overline{CD}$. Für das rechtwinklige Dreieck ΔCDE gilt: $\measuredangle DCE=\arctan\frac{\overline{DE}}{\overline{CD}}=\arctan\frac{6}{10}\approx 31°$. oder $\overrightarrow{\eta_{xy}}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, Normalenvektor von L wird der Aufgabe 2.2 entnommen: $\overrightarrow{\eta_L}=\begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix}$. Der Winkel wird wie folgt bestimmt: $\alpha=\arccos\frac{\overrightarrow{\eta_{xy}}\circ\overrightarrow{\eta_L}}{\lvert\overrightarrow{\eta_{xy}}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{\eta_L}\rvert}=\arccos\frac{5}{1\cdot\sqrt{34}}\approx\arccos 0{,}8575\approx 31°$	2	

2.4	In der ersten Zeile wird ein beliebiger Punkt auf der Geraden durch B und E als P bezeichnet. Dies ist der in der Aufgabenstellung genannte Punkt auf der Kante $\overline{BE}$, über den die Linie verlaufen soll. In der zweiten Zeile wird die Bedingung aufgestellt, dass das Dreieck ΔPCB einen rechten Winkel bei P hat. Diese Bedingung ist äquivalent dazu, damit ist diese Linie die kürzeste. Die Lösung dieser Gleichung ist angegeben. In der dritten Zeile wird die Länge der Linie unter Ausnutzung der Symmetrie des Holzkörpers bestimmt: $\lvert\overrightarrow{PA}\rvert = \lvert\overrightarrow{PC}\rvert \Rightarrow$ damit hat die Linie eine Länge von $2\cdot\lvert\overrightarrow{PC}\rvert$	4	
2.5.1	Abbildung auf dem Arbeitsblatt: 	2	
2.5.2	$V_{ABCDE} = \frac{1}{3}\lvert\overrightarrow{AB}\rvert^2 \cdot \lvert\overrightarrow{DE}\rvert$ $V_{ABCDEF} = \frac{1}{2}\lvert\overrightarrow{AB}\rvert^2 \cdot \lvert\overrightarrow{DE}\rvert \Rightarrow \frac{3}{2}\cdot V_{ABCDE} = V_{ABCDEF}$ V_{ABCDEF} ist 50% größer als V_{ABCDE} oder Teilt man die Pyramide ABCDE entlang ihrer Symmetrieebene, so erhält man zwei kongruente Teilpyramiden, von denen eine BCDE ist. Die Grundflächen ΔCDE und ΔABF der Pyramiden BCDE und ABFE sind kongruent, genauso wie ihre Höhen $\overline{BC}$ und $\overline{FE}$. Folglich sind diese beiden Pyramiden volumengleich. Der Körper ABCDEF besteht aus drei dieser kleinen Pyramiden, während ABCDE nur zwei dieser Pyramiden enthält. Somit ist ABCDEF um 50% größer als ABCDE.	4	
	Summe:	**20**	

3 Stochastik

Aufgabe	Lösungen	mögliche BE	erteilte BE
3.1	Es werden folgende Ereignisse betrachtet: w: „Eine Person ist weiblich.“, A: „Eine Person hat Abitur.“ $h(\bar{w} \mid \bar{A}) = \frac{h(\bar{w} \wedge \bar{A})}{h(\bar{A})} = \frac{h(\bar{w} \wedge \bar{A})}{1-h(A)} = \frac{0{,}34}{1-0{,}36} \approx 0{,}53$	2	
3.2		3	
3.3	Laut Pfadregeln ergibt sich $h(w) = 0{,}36 \cdot 0{,}54 + 0{,}64 \cdot 0{,}47 = 0{,}4952$ und somit $H(w) = 27000 \cdot 0{,}4952 \approx 13370$.	3	
3.4.1	Sei X die Anzahl ausgewählter Personen mit Abitur. Laut Aufgabenstellung ist X binomialverteilt, und zwar mit $n = 100$ und $p = p(A) = 0{,}36$. $P(X = 30) = B_{100;\,0{,}36}(X = 30) \approx 0{,}0389$	1	
3.4.2	$E(X) = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}36 = 36$ $P(X < 36) = B_{100;\,0{,}36}(X \leq 35) \approx 0{,}4624$	3	
3.5.1	Beim Untersuchen der vier Ausgewählten ändert sich die Wahrscheinlichkeit für eine Person mit Abitur in Abhängigkeit davon, ob die zuvor untersuchte Person Abitur hat oder nicht. Die einzelnen Bernoulliexperimente dieser Kette sind also nicht unabhängig voneinander. Bei einer Auswahl von 4 von 100 ist dieser Einfluss auch nicht vernachlässigbar klein.	2	
3.5.2	$p = \frac{60}{100} \cdot \frac{59}{99} \cdot \frac{58}{98} \cdot \frac{57}{97} \approx 0{,}1244$	2	
3.6	Man setzt für n im Term zur Berechnung der kumulierten Wahrscheinlichkeit $P_p^n(20 < X \leq n)$ verschiedene Werte so ein, dass diese Wahrscheinlichkeit möglichst nahe an p % liegt. Der Wert von n, für den der angegebene Term letztmalig den Wert von p % unterschreitet, ist der größte infrage kommende Wert. Alle Werte von 21 bis zu diesem größten Wert von n kommen infrage.	4	
	Summe:	**20**	