Mecklenburg-Vorpommern

Zentralabitur 2021

Mathematik

Leistungskurs

Prüfungsteil A – hilfsmittelfreie Aufgaben

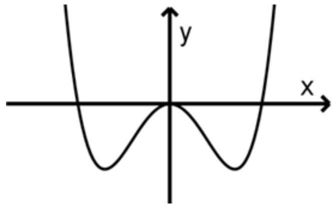
Name, Vorname: ____________________

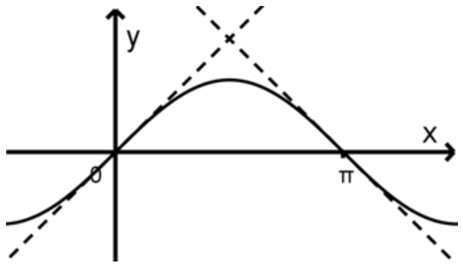
Arbeitsblatt

Dieses Arbeitsblatt ist ohne Zuhilfenahme von Tafelwerk oder Taschenrechner zu bearbeiten. Zusätzliche Lösungsblätter sind mit Ihrem Namen zu versehen und in dieses Arbeitsblatt einzulegen.

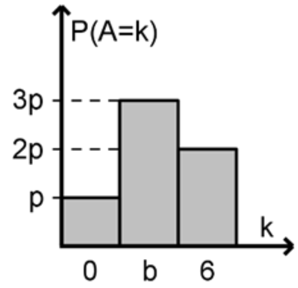
Für dieses Arbeitsblatt beträgt die Bearbeitungszeit maximal 100 Minuten.

Zu bearbeiten sind die **vier** Pflichtaufgaben sowie **zwei** der drei Wahlaufgaben.

1 Analysis – Pflichtaufgabe	BE
Gegeben ist eine in IR definierte Funktion f mit $f(x) = x^4 - k \cdot x^2$, wobei k eine positive reelle Zahl ist. Die Abbildung zeigt den Graphen von f. 	
1.1 Zeigen Sie, dass $f'(x) = 2x \cdot (2x^2 - k)$ eine Gleichung der ersten Ableitungsfunktion von f ist.	1
1.2 Die beiden Tiefpunkte des Graphen von f haben jeweils die y-Koordinate -1. Ermitteln Sie den Wert von k.	4

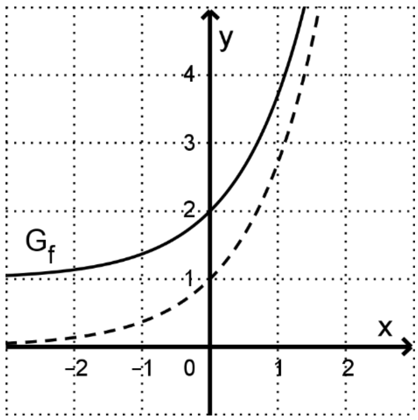
2 Analysis – Pflichtaufgabe	BE
Gegeben ist die in IR definierte Funktion f mit $f(x) = \sin x$. Die Abbildung zeigt den Graphen G_f von f sowie die Tangenten an G_f in den dargestellten Schnittpunkten mit der x-Achse. 	
2.1 Zeigen Sie, dass diejenige der beiden Tangenten, die durch den Koordinatenursprung verläuft, die Steigung 1 hat.	1
2.2 Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das von G_f und den beiden Tangenten eingeschlossen wird.	4

3 Analytische Geometrie – Pflichtaufgabe	BE
Gegeben sind die Punkte $A(2 \mid -3 \mid 1)$ und $B(2 \mid 3 \mid 1)$.	
3.1 Begründen Sie, dass die Gerade durch A und B parallel zur y-Achse verläuft.	1
3.2 Der Punkt C liegt auf der y-Achse. Die Gerade durch A und C steht senkrecht zur Gerade durch B und C. Bestimmen Sie die Koordinaten aller Punkte, die die beschriebenen Eigenschaften des Punkts C haben.	4

4 Stochastik – Pflichtaufgabe	BE
Bei einem Gewinnspiel beträgt der Einsatz für die Teilnahme 3 Euro. Die Auszahlung in Euro wird durch die Zufallsgröße A beschrieben. Die Abbildung zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von A. 	
4.1 Zeigen Sie, dass p den Wert $\frac{1}{6}$ hat.	1
4.2 Bei wiederholter Durchführung des Spiels ist zu erwarten, dass sich auf lange Sicht Einsätze und Auszahlungen ausgleichen. Berechnen Sie den Wert von b.	2
4.3 Beschreiben Sie, wie das Gewinnspiel unter Verwendung eines Behälters sowie roter, grüner und blauer Kugeln durchgeführt werden könnte.	2

Von den folgenden drei Wahlaufgaben sind **zwei** zu bearbeiten.

5 Analysis – Wahlaufgabe	BE
Die Abbildung zeigt den Graphen G_f einer in IR definierten Funktion f sowie den Graphen der ersten Ableitungsfunktion von f.	



		BE
5.1	Geben Sie die Steigung der Tangente an G_f im Punkt $(0\,|\,f(0))$ an.	1
5.2	Betrachtet wird die Schar der Funktionen g_c mit $c \in IR^+$. Der Graph von g_c geht aus G_f durch Streckung mit dem Faktor c in y-Richtung hervor. Die Tangente an den Graphen von g_c im Punkt $(0\,|\,g_c(0))$ schneidet die x-Achse. Bestimmen Sie rechnerisch die x-Koordinate des Schnittpunkts.	4

6 Analytische Geometrie – Wahlaufgabe	BE
Gegeben sind die Punkte $A(0\mid 0\mid 0)$, $B(3\mid 4\mid 1)$, $C(1\mid 7\mid 3)$ und $D(-2\mid 3\mid 2)$.	
6.1 Weisen Sie nach, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist.	1
6.2 Der Punkt T liegt auf der Stecke $\overline{AC}$. Das Dreieck ABT hat bei B einen rechten Winkel. Ermitteln Sie das Verhältnis der Länge der Strecke $\overline{AT}$ zur Länge der Strecke $\overline{CT}$.	4

7 Stochastik – Wahlaufgabe	BE
In einem Behälter befinden sich Kugeln, von denen jede dritte gelb ist.	
7.1 Aus dem Behälter wird zweimal nacheinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Kugeln gelb sind.	1
7.2 Im Behälter werden zwei gelbe Kugeln durch zwei blaue Kugeln ersetzt. Anschließend wird aus dem Behälter erneut zweimal nacheinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Kugeln gelb sind, beträgt nun $\frac{1}{16}$. Ermitteln Sie, wie viele gelbe Kugeln sich nach den beschriebenen Vorgängen im Behälter befinden.	4

Mecklenburg-Vorpommern

Zentralabitur 2021

Mathematik (CAS)

Leistungskurs

Prüfungsteil B – komplexe Aufgaben

1 Analysis

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen

$f_a(x) = -\frac{a}{250}x^4 + \frac{1}{25}x^3$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ sowie

$g_a(x) = f_a(x) - \frac{3}{5}x$.

Die Abbildung 1 zeigt den Graphen von g_1.

Hinweis: Zu dieser Aufgabe gehört das beiliegende Arbeitsblatt.

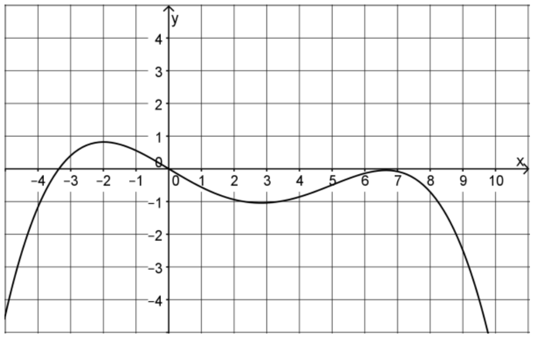


Abbildung 1

1.1 Berechnen Sie für den Graphen von f_1 die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sowie die Koordinaten des Extrempunkts. 6 BE

Zeichnen Sie den Graphen von f_1 in die Abbildung 1 des Arbeitsblattes ein.

1.2 Geben Sie an, für welche Werte von x der Graph von f_1 oberhalb des Graphen von g_1 verläuft und für welche unterhalb. Begründen Sie Ihre Angabe. 3 BE

1.3 Für jeden Wert von a gilt: 5 BE

I Die Funktionsterme von f_a und g_a unterscheiden sich nur um den Summanden $-\frac{3}{5}x$.

II Der Graph von f_a hat genau zwei Wendepunkte, deren x-Koordinaten 0 und $\frac{5}{a}$ sind.

Geben Sie an, was sich aus I und II hinsichtlich der Anzahl und der Lage der Wendepunkte des Graphen von g_a im Vergleich zu den Wendepunkten des Graphen von f_a folgern lässt.

Begründen Sie Ihre Angabe ausgehend von I und II.

Der Aufgabentext wird auf der folgenden Seite fortgesetzt.

1.4 Die Tangente t_f an den Graphen von f_a im Punkt $\left(\frac{5}{a} \mid f_a\left(\frac{5}{a}\right)\right)$ hat die Steigung $\frac{1}{a^2}$,

die Tangente t_g an den Graphen von g_a im Punkt $\left(\frac{5}{a} \mid g_a\left(\frac{5}{a}\right)\right)$ die Steigung $\frac{5-3a^2}{5a^2}$

. Der Schnittpunkt dieser beiden Tangenten wird mit S bezeichnet.

1.4.1 Weisen Sie nach, dass S für jeden Wert von a auf der y-Achse liegt.

1.4.2 Die Gerade mit der Gleichung $x = \frac{5}{a}$ schneidet t_f im Punkt F und t_g im Punkt G. 3 BE 6 BE

Untersuchen Sie, für welche Werte von $a \in \mathbb{R}^+$ das Dreieck SGF rechtwinklig ist.

Die Abbildung 2 zeigt schematisch die Profillinie des Längsschnitts einer Skipiste in einer Skihalle. Die Piste ist in Querrichtung nicht geneigt und durchgehend 30 m breit. Die Profillinie wird für $0 \le x \le 41{,}5$ modellhaft durch den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $p(x) = -0{,}000\,004\,x^4 + 0{,}015\,x^2 - 0{,}1x + 0{,}1875$ dargestellt.

Im verwendeten Koordinatensystem beschreibt die x-Achse die Horizontale; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 10 m in der Realität.

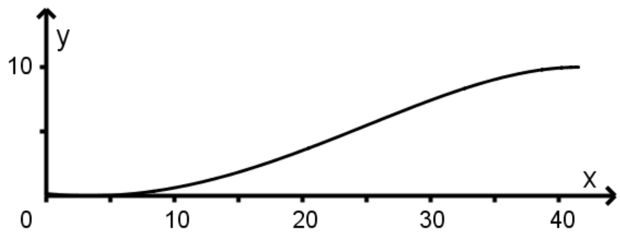


Abbildung 2

1.5 Berechnen Sie die Größe des größten Neigungswinkels der Piste gegenüber der Horizontalen. 4 BE

1.6 Über der Piste verläuft in deren Längsrichtung ein Seil. Die beiden Enden des Seils werden im Modell durch $A(5 \mid 2{,}31)$ und $B(37 \mid 10{,}68)$ dargestellt; der Verlauf des Seils kann mithilfe einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $h(x) = b \cdot e^{c \cdot x}$ mit $b, c \in \mathbb{R}^+$ beschrieben werden.

1.6.1 Bestimmen Sie die Werte von b und c. 2 BE

(zur Kontrolle: $b \approx 1{,}818$, $c \approx 0{,}04785$)

Der Aufgabentext wird auf der folgenden Seite fortgesetzt.

1.6.2 Untersuchen Sie, in welchen Bereichen der vertikale Abstand des Seils zur Piste mindestens 3 m beträgt. 6 BE

Ermitteln Sie die Höhendifferenz, um die die beiden Enden des Seils gemeinsam mindestens angehoben werden müssten, damit das Seil an jeder Stelle von der Piste einen vertikalen Abstand von mindestens 3 m hat.

1.7 Die Abbildung 3 zeigt grau markiert die Schneeauflage im unteren Bereich der Piste; dazu wurde die Abbildung 2 in Richtung der y-Achse stärker vergrößert als in Richtung der x-Achse. Der Untergrund, auf dem der Schnee aufgebracht ist, wird für $0 \leq x \leq 5$ durch die x-Achse dargestellt. Für den übrigen Teil der Piste soll davon ausgegangen werden, dass die in vertikaler Richtung gemessene Schneehöhe 60 cm beträgt. 5 BE

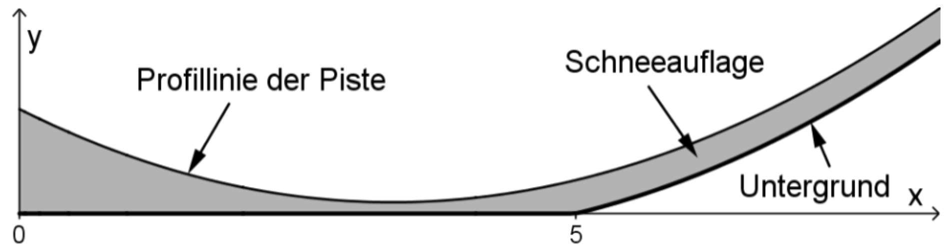


Abbildung 3

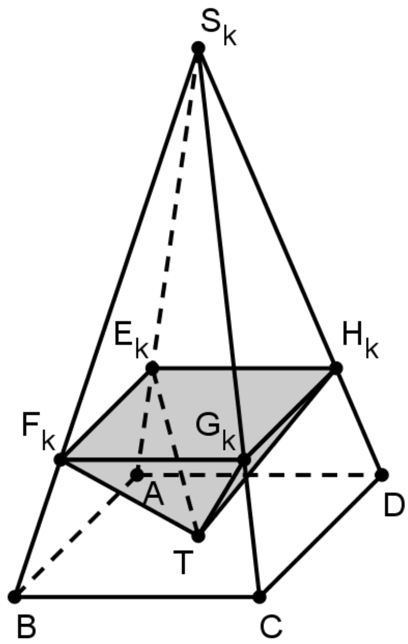
Bestimmen Sie das Volumen der Schneeauflage der gesamten Piste.

2 Analytische Geometrie

Betrachtet werden die Pyramiden $ABCDS_k$ mit $A(0|0|0)$, $B(2|0|0)$, $C(2|2|0)$, $D(0|2|0)$ und $S_k(1|1|k)$ mit $k \in \,]1;+\infty[$.

Die gemeinsame Grundfläche ABCD dieser Pyramiden ist quadratisch. Der abgebildete Punkt T ist der Schnittpunkt der Diagonalen der Grundfläche ABCD.

Die Abbildung zeigt beispielhaft eine dieser Pyramiden.



2.1 Begründen Sie, dass jede der Pyramiden $ABCDS_k$ gerade ist. — 5 BE

Berechnen Sie den Inhalt der Mantelfläche der Pyramide $ABCDS_k$.

2.2 Begründen Sie, dass die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ keine Symmetrieebene der Pyramide $ABCDS_k$ beschreibt. — 3 BE

Geben Sie für eine Symmetrieebene der Pyramide $ABCDS_k$ eine Gleichung in Koordinatenform an.

2.3 Die Seitenfläche ABS_k liegt in der Ebene L. Bestimmen Sie eine Gleichung von L in Koordinatenform. — 3 BE

(zur Kontrolle: $k \cdot y - z = 0$)

2.4 Bestimmen Sie denjenigen Wert von k, für den die Seitenfläche ABS_k gegenüber der Grundfläche ABCD um einen Winkel der Größe 60° geneigt ist. — 3 BE

2.5 Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{TS_k}$ wird mit Q_k bezeichnet. Für einen Wert von k ist Q_k von der Grundfläche ABCD dreimal so weit entfernt wie von jeder der vier Seitenflächen der Pyramide $ABCDS_k$. Berechnen Sie diesen Wert von k. — 4 BE

Der Aufgabentext wird auf der folgenden Seite fortgesetzt.

2.6 Die Ebene mit der Gleichung $z = 1$ schneidet die vier vom Punkt S_k ausgehenden Kanten der Pyramide $ABCDS_k$ in den Punkten E_k, F_k, G_k und H_k (vgl. Abbildung).

2.6.1 Bestimmen Sie die x- und die y-Koordinate von F_k. 3 BE

2.6.2 Bestimmen Sie diejenigen Werte von k, für die das Verhältnis des Volumens der Pyramide $E_kF_kG_kH_kT$ zum Volumen der Pyramide $ABCDS_k$ $1:8$ beträgt. 4 BE

3 Stochastik

Ein Unternehmen produziert Stahlkugeln für Kugellager. Erfahrungsgemäß sind 4 % aller Kugeln fehlerhaft. 800 Kugeln werden zufällig ausgewählt. Die Anzahl der fehlerhaften Kugeln unter den ausgewählten kann durch eine binomialverteilte Zufallsgröße beschrieben werden.

3.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den ausgewählten Kugeln weniger als 30 fehlerhaft sind. 2 BE

3.2 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der fehlerhaften Kugeln unter den ausgewählten höchstens um eine halbe Standardabweichung vom Erwartungswert dieser Anzahl abweicht. 5 BE

3.3 Eine fehlerhafte Kugel ist entweder zu klein oder zu groß. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Kugel zu klein ist, beträgt 3 %. Alle Kugeln werden vor dem Verpacken geprüft. Dabei werden 95 % der zu kleinen Kugeln, 98 % der zu großen Kugeln, aber auch 0,5 % der Kugeln ohne Fehler aussortiert.

3.3.1 Stellen Sie den Sachzusammenhang in einem beschrifteten Baumdiagramm dar. 4 BE

3.3.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine aussortierte Kugel nicht zu klein ist. 3 BE

3.4 Die Kugeln werden in Packungen verkauft. Ein Teil der verkauften Packungen wird zurückgegeben. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine verkaufte Packung zurückgegeben wird, beträgt 3 %. Dem Unternehmen entsteht pro Packung, die zurückgegeben wird, ein Verlust von 5,80 Euro; pro Packung, die nicht zurückgegeben wird, erzielt das Unternehmen einen Gewinn von 8,30 Euro. 4 BE

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der das Unternehmen bei einem Verkauf von 200 Packungen einen Gesamtgewinn von mindestens 1500 Euro erzielt.

3.5 Ein Konkurrenzunternehmen stellt ebenfalls Stahlkugeln für Kugellager her. Beide Unternehmen bieten die Kugeln mit einem Durchmesser von 6 mm (Normwert) und einer Toleranz von 0,01 mm zum Kauf an. Die Einhaltung dieses Normwertes wird im Rahmen einer Stichprobe untersucht. Dazu wurden in den Unternehmen jeweils 10 000 Kugeln aus einer Tagesproduktion entnommen und deren Durchmesser gemessen. Die Tabelle zeigt die dabei ermittelten Werte.

Durchmesser in mm	5,97	5,98	5,99	6	6,01	6,02	6,03
Häufigkeit im Unternehmen	3	12	257	7896	1830	2	0
Häufigkeit im Konkurrenzunternehmen	4	2	1633	6301	2052	7	1

3.5.1 Werten Sie diese statistische Erhebung durch einen geeigneten Mittelwert und ein geeignetes Streumaß aus. 4 BE

3.5.2 Beurteilen Sie die Qualität der Kugeln beider Unternehmen. 3 BE

Arbeitsblatt zur Aufgabe 1