Mecklenburg-Vorpommern

Zentralabitur 2021

Mathematik (CAS)

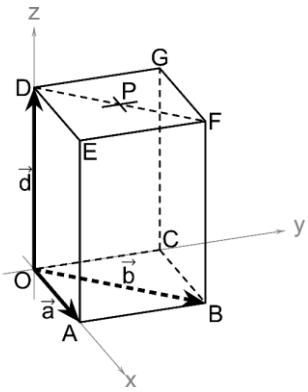
Grundkurs

Musterlösung

Aufgabenteil A

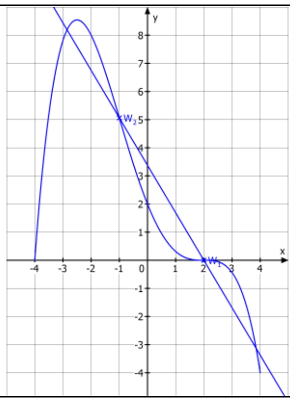
Aufgabe	Lösungen	mögliche BE	erteilte BE
1.1	Die Graphen II und III kommen nicht in Frage. Begründung: Es gilt $f(0{,}5)<0$. Graph II besitzt an der Stelle $x=0{,}5$ jedoch einen positiven Funktionswert. Der Graph der Ableitungsfunktion $f'(x)=3x^2-1$ besitzt keine konstanten Abschnitte. Somit kann auch Graph III aufgrund seines linearen Verlaufs ausgeschlossen werden.	2	
1.2	$f(x)=0$ $x^3-x=x(x^2-1)=0 \quad \Rightarrow x_1=-1;\ x_2=0;\ x_3=1$ Aufgrund der Punktsymmetrie gilt: $A=2\cdot\left\|\int_{-1}^{0} f(x)\,dx\right\|$ $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}$ $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx=(0-0)-\left(\frac{1}{4}\cdot(-1)^4-\frac{1}{2}\cdot(-1)^2\right)$ $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx=\frac{1}{4}$ $A=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$	3	
2.1	Durch Ablesen der Funktionswerte erhält man: $F(-5)\approx-1{,}3$ und $F(1)\approx1{,}7$ Es gilt: $\int_{1}^{5} f(x)\,dx=F(5)-F(1)=-1{,}3-(-1{,}7)=-3$.	2	
2.2	Ein Kästchen mit der Seitenlänge 0,5 hat einen Flächeninhalt von 0,25. Die Anzahl dieser Kästchen in der Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse im Intervall $1<x<5$ kann durch Auszählen bestimmt werden und muss mit 0,25 multipliziert werden. Da die Fläche unterhalb der x-Achse liegt, ist das Ergebnis negativ.	3	
3.1	$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-3\\4\\5-a\end{pmatrix}$ $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(-3)^2+4^2+(5-a)^2}=\sqrt{a^2-10a+50}=5$ $a^2-10a+25=0 \Leftrightarrow a=5$	3	
3.2	Benötigt werden die Vektoren $\overrightarrow{OB}$ und $\overrightarrow{AB}$. Das Skalarprodukt der Vektoren muss null ergeben.	2	

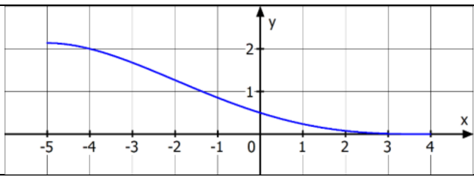
	$\overrightarrow{OB} \circ \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5-a \end{pmatrix} = -6+16+25-5a = 35-5a$ $35-5a=0 \Rightarrow a=7$		
4.1	Die Wahrscheinlichkeit, dass keine 6 fällt, beträgt $\frac{5}{6}$. Somit ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit, dass in zwei Würfen keine sechs fällt: $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$.	2	
4.2	Abbildung 1 zeigt nicht die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X, da die höchste Säule für $X=20$ nicht mit dem Erwartungswert von 25 übereinstimmt. Abbildung 2 zeigt nicht die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X, da die Summe aller Werte einer Wahrscheinlichkeitsverteilung 1 ergibt. Für Abbildung 2 erhält man: $P(X=23)+P(X=24)+P(X=25)+P(X=26)+P(X=27)>1$ Abbildung 3 zeigt nicht die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X, da $n=36$ und in dieser Abbildung auch die Wahrscheinlichkeit für $X=40$ größer als null ist.	3	
5.1	Der Funktionsterm weist nur ungerade Exponenten auf. Demzufolge handelt es sich um eine ungerade Funktion und diese sind punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung. Alternativ kann die Punktsymmetrie anhand des Funktionsterms nachgewiesen werden: $-f(-x) = -\left(-(-x)^5 + 2\cdot(-x)^3 + (-x)\right) = -\left(x^5 - 2x^3 - x\right) = -x^5 + 2x^3 + x = f(x)$	1	
5.2	$f(x)=0$ $0 = x\cdot(-x^4+2x^2+1) \quad \vert x$ ausgeklammert $\Rightarrow \quad x_1 = 0$ Es gibt somit mindestens eine Nullstelle $x_1=0$. Alternativ kann mit dem Verhalten einer ganzrationalen Funktion fünften Grades im Unendlichen argumentiert werden: Der Graph ist stetig und verläuft vom positiven Unendlichen ins negative Unendliche. Dabei wird mindestens einmal die x-Achse geschnitten.	1	

5.3	Für die erste Ableitungsfunktion erhält man $f'(x) = -5x^4 + 6x^2 + 1$. Durch die Auswahl geeigneter Stellen erhält man: $f'(0) = 1$ und $f'(2) = -55$. Da die Funktion $f'(x)$ stetig ist, befindet sich im Intervall $0 < x < 2$ eine Nullstelle (notwendige Bedingung) der Ableitungsfunktion mit Vorzeichenwechsel (hinreichende Bedingung).	3	
6.1	Der Punkt ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{OC}$. $\vec{b} - \vec{a}$ liefert den Vektor $\overrightarrow{OC}$. Der Faktor $\frac{1}{2}$ halbiert die Länge dieses Vektors.	1	
6.2		1	
6.3	$\vec{b} \circ \overrightarrow{OP} = \vec{b} \circ \left(\frac{1}{2}\vec{b} + \vec{d} \right) = \frac{1}{2}\vec{b} \circ \vec{b} + \underbrace{\vec{b} \circ \vec{d}}_{=0} = \frac{1}{2}\vec{b} \circ \vec{b} = \frac{1}{2}\left\|\vec{b}\right\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cdot \cos 0^\circ = \frac{1}{2}\left\|\vec{b}\right\|^2$ Da $\left\|\vec{b}\right\| = \sqrt{\left\|\vec{a}\right\|^2 + \left\|\vec{a}\right\|^2} = \sqrt{2} \cdot \left\|\vec{a}\right\|$ ist, ist der Term $\vec{b} \circ \overrightarrow{OP}$ nur von der Seitenlänge der Grundfläche abhängig.	3	
7.1	$P(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$	2	
7.2	Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist symmetrisch, da $p = 0{,}5$. Daraus folgt: $P(Y \le 13) = 0{,}5$ und $P(Y = 15) = P(Y = 12) \approx 0{,}13$ $P(Y = 14) = P(Y \le 15) - P(Y = 15) - P(Y \le 13)$ $\approx 0{,}78 - 0{,}13 - 0{,}5 = 0{,}15$	3	
	Summe:	**25**	

Aufgabenteil B

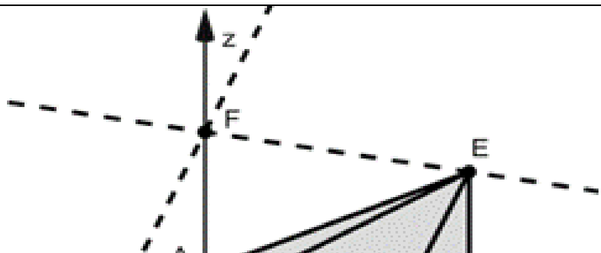
1 Analysis

Aufgabe	Lösungen	mögliche BE	erteilte BE
1.1	Schnittpunkt mit der x-Achse: $SP_{x_1}(-4\|0)$, $SP_{x_2}(2\|0)$ Schnittpunkt mit der y-Achse: $SP_y(0\|2)$	2	
1.2	Zwischen den einzigen beiden Nullstellen $x=-4$ und $x=2$ liegt die Stelle $x=0$, an der der G_f oberhalb der x-Achse verläuft. Als ganzrationale Funktion ist f stetig und muss somit von $x=-4$ an wachsen und dann wieder bis $x=2$ fallen. Es gibt somit im Bereich $-4\le x\le 2$ einen lokaler Hochpunkt.	3	
1.3	f ist eine ganzrationale Funktion vierten Grades und hat somit höchstens zwei Wendepunkte, weil ihre zweite Ableitung als ganzrationale Funktion zweiten Grades höchstens zwei Nullstellen hat. Somit kann f neben W_1 und W_2 keine weiteren Wendepunkte haben. Es gilt: $f''(-1)=0$ $f'''(-1)=\frac{9}{4}\neq 0$ $f(-1)=\frac{81}{16}$ Somit liegt W_2 auf G_f und erfüllt das hinreichende Kriterium für einen Wendepunkt.	3	
1.4.1	grafische Darstellung  Mit $g(x)=-\frac{27}{16}x+\frac{27}{8}$ ergibt sich $g(2)=0$ und $g(-1)=\frac{81}{16}$. Somit liegen W_1 und W_2 auf g.	4	
1.4.2	Die weiteren Schnittstellen von g und G_f ergeben sich durch $f(x)=g(x)\rightarrow x_{1;2}=\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}\sqrt{5}$. Der Abbildung ist zu entnehmen, dass Aussage erfüllt ist, wenn das Integral der Differenzfunktion als Flächenbilanz der Flächenstücke zwischen diesen äußeren Schnittstellen den Wert 0 hat. $\int_{x_1}^{x_2}\left(f(x)-g(x)\right)dx=0$	4	

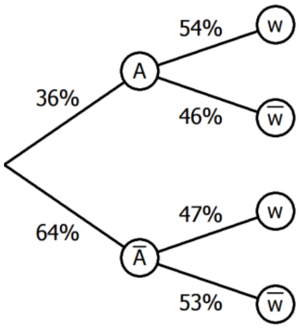
<table>
<tr><td>1.4.3</td><td>Eine Gerade, die G_f berührt, ist eine Tangente an G_f. Es gibt überall dort zu g parallele Tangenten, wo der Anstieg von G_f gleich dem Anstieg von g ist: $f'(x) = -\frac{27}{16} \to x_{3;\,4} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{3}, x_5 = \frac{1}{2}$
Die Tangenten an G_f an diesen Stellen lauten:
<table>
<tr><td>Stelle</td><td>x_3</td><td>x_4</td><td>x_5</td></tr>
<tr><td>Tangenten-gleichung</td><td>$y = -\frac{27}{16}x + \frac{297}{64}$</td><td>$y = -\frac{27}{16}x + \frac{297}{64}$</td><td>$y = -\frac{27}{16}x + \frac{459}{256}$</td></tr>
</table>
Die Tangenten an den Stellen x_3 und x_4 sind offensichtlich identisch. Es gibt also zwei solche Geraden.</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>1.5.1</td><td>$y = h(-5) = \frac{2187}{1024}$
</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>1.5.2</td><td>Der Graph von h entsteht aus G_f durch Stauchung um dem Faktor 4 in y-Richtung und Streckung um den Faktor 2 in x-Richtung.</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>1.5.3</td><td>Der tiefste Punkt des Hanges ist bei $x = 4$, sein höchster Punkt bei $x = -5$. Somit gilt zwischen diesen Punkten:
$\text{Höhenunterschied} = \left(h(-5) - h(4)\right) \cdot 100\,\text{m} \approx 214\,\text{m}$
$\text{durchschnittliches Gefälle} = \frac{\text{Höhenunterschied}}{\text{Längenunterschied}} = \frac{214\,\text{m}}{900\,\text{m}} \approx 0{,}24 = 24\%$</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>1.5.4</td><td>Das maximale Gefälle ergibt sich, weil h im betrachteten Intervall monoton fallend ist, als minimaler Funktionswert von h' in diesem Intervall. Laut CAS findet man diesen minimalen Funktionswert von h' bei $x = -2$ und dort gilt: $h'(-2) = -\frac{27}{64} \approx -0{,}42 = -42\%$.
Es handelt sich also um eine schwere Piste.</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>1.5.5</td><td>Die Gleichung einer Tangente t an h an der Stelle a lautet gemäß CAS: $t(x) = \frac{(a-4)^2 \cdot \left(3a^2 + 16a + 32\right)}{1024} - \frac{(a-4)^2 \cdot (a+5)}{256} \cdot x$.
Wenn der Turm von der Stelle a aus gerade noch so sichtbar ist, dann verläuft die Tangenten durch die Spitze des Turms, d. h. es gilt: $t(-5) = h(-5) + 0{,}25$. Die Lösungen dieser Gleichung lauten:
$a_1 \approx -6{,}1; a_2 \approx -3{,}3; a_3 \approx -0{,}87; a_4 \approx 6{,}3$. a_1 und a_4 entfallen, weil sie außerhalb des betrachteten Bereichs liegen. a_2 ist die rechte Begrenzung des oberen, gesuchten Abschnitts; a_3 ist die linke Begrenzung des unteren, nicht gesuchten Abschnitts.
Der obere, gesuchte Abschnitt ist also $-5 \le x \le -3{,}3$.</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Summe:</td><td>35</td><td></td></tr>
</table>

2 Analytische Geometrie

Aufgabe	Lösungen	mögliche BE	erteilte BE
2.1	Aus der Zeichnung kann man vermuten, dass der rechte Winkel bei C liegt. $\overrightarrow{CB}=\begin{pmatrix}0\\-10\\0\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{CE}=\begin{pmatrix}-10\\0\\6\end{pmatrix}$ Man erhält $\overrightarrow{CB}\circ\overrightarrow{CE}=0$, also stehen $\overline{CB}$ und $\overline{CE}$ senkrecht aufeinander und ΔBCE hat einen rechten Winkel bei C. Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat der Seitenlänge 10 und ΔCDE hat einen rechten Winkel bei D. Da der Körper eine Symmetrieebene besitzt, sind die Dreiecke ΔABE und ΔBCE sowie ΔDAE und ΔCDE jeweils kongruent zueinander. Demzufolge gilt: $A_O=A_{ABCD}+2\cdot A_{BCE}+2\cdot A_{CDE}=10^2+2\cdot\frac{10\cdot\left\|\overrightarrow{CE}\right\|}{2}+2\cdot\frac{10\cdot\left\|\overrightarrow{DE}\right\|}{2}\approx 277$. Der Holzkörper hat also eine Oberfläche von ca. 277 cm².	5	
2.2	Die Koordinatenform der Ebenengleichung von L lautet mit $P(x\|y\|z)$: $L(P)=ax+by+cz=\overrightarrow{OP}\circ\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=d$ mit unbekannten Werten von a,b,c,d. Das Einsetzen von B, C und E liefert mit $d=1$ ein Gleichungssystem, dessen Lösung gemäß CAS lautet: $a=\frac{1}{10},b=0,c=\frac{1}{6}$. Eine Ebenengleichung in Koordinatenform lautet: $L:\frac{1}{10}x+\frac{1}{6}z=1$. Alternativ: Wird für die Ebene eine Parametergleichung aufgestellt und das Gleichungssystem $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\0\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}0\\10\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-10\\10\\6\end{pmatrix}$ z.B. nach s aufgelöst, so erhält man als ein Ergebnis $x=\frac{-5\cdot(z-6)}{3}$. Wird diese Gleichung entsprechend umgestellt, so ergibt sich für die Ebenengleichung in Koordinatenform: $3x+5z-30=0$.	3	
2.3	Weil $\overline{BC}$ zur Grundfläche und zur Seitenfläche gehört und wegen $\overline{CE}\perp\overline{CB}$ sowie $\overline{CD}\perp\overline{CB}$ ist der Winkel zwischen den gesuchten Flächen der Winkel zwischen $\overline{CE}$ und $\overline{CD}$. Der lässt sich im rechtwinkligen Dreieck ΔCDE ausrechnen durch: $\measuredangle DCE=\arctan\frac{\overline{DE}}{\overline{CD}}=\arctan\frac{6}{10}\approx 31^\circ$.	2	

	Alternativ kann der Winkel auch mithilfe des Skalarproduktes ermittelt werden. Die Grundfläche liegt in der xy-Ebene, deren Normalenvektor ist $\overrightarrow{\eta_{xy}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Der Normalenvektor der Ebene L wird der Aufgabe 2.2 entnommen: $\overrightarrow{\eta_L} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$. Der Winkel wird wie folgt bestimmt: $\alpha = \arccos \frac{\overrightarrow{\eta_{xy}} \circ \overrightarrow{\eta_L}}{\left\lvert \overrightarrow{\eta_{xy}} \right\rvert \cdot \left\lvert \overrightarrow{\eta_L} \right\rvert} = \arccos \frac{5}{1 \cdot \sqrt{34}} \approx \arccos 0{,}8575 \approx 31°$		
2.4	In der ersten Zeile wird ein beliebiger Punkt auf der Geraden durch B und E als P bezeichnet. Dies ist der in der Aufgabenstellung genannte Punkt auf der Kante $\overline{BE}$, über den die Linie verlaufen soll. In der zweiten Zeile wird die Bedingung aufgestellt, dass das Dreieck ΔPCB einen rechten Winkel bei P hat. Diese Bedingung ist äquivalent dazu, dass die gesuchte Linie kürzest möglich ist. Die Lösung dieser Gleichung wurde ausgerechnet. In der dritten Zeile wird die Länge der Linie unter Ausnutzung der Symmetrie des Holzkörpers als Doppeltes der Teillinie $\overline{PC} = \left\lvert \overrightarrow{PC} \right\rvert$ berechnet.	4	
2.5.1	Abbildung auf dem Arbeitsblatt:  	2	
2.5.2	Teilt man die Pyramide ABCDE entlang ihrer Symmetrieebene, so erhält man zwei kongruente Teilpyramiden, von denen eine BCDE ist. Die Grundflächen ΔCDE und ΔABF der Pyramiden BCDE und ABFE sind kongruent, genauso wie ihre Höhen $\overline{BC}$ und $\overline{FE}$. Folglich sind diese beiden Pyramiden volumengleich. Der Körper ABCDEF aus drei dieser kleinen Pyramiden, während ABCDE nur aus zweien besteht. Somit ist ABCDEF um 50% größer als ABCDE.	4	
	Summe:	**20**	

3 Stochastik

Aufgabe	Lösungen	mögliche BE	erteilte BE
3.1	Es werden folgende Ereignisse betrachtet: w: „Eine Person ist weiblich.“, A: „Eine Person hat Abitur.“ $h\left(\overline{w} \mid \overline{A}\right)=\frac{h\left(\overline{w} \wedge \overline{A}\right)}{h\left(\overline{A}\right)}=\frac{h\left(\overline{w} \wedge \overline{A}\right)}{1-h(A)}=\frac{0,34}{1-0,36} \approx 0,53$	2	
3.2		3	
3.3	Laut Pfadregeln ergibt sich $h(w)=0,36 \cdot 0,54+0,64 \cdot 0,47=0,4952$ und somit $H(w)=27000 \cdot 0,4952 \approx 13370$.	3	
3.4.1	Sei X die Anzahl ausgewählter Personen mit Abitur. Laut Aufgabenstellung ist X binomialverteilt, und zwar mit $n=100$ und $p=p(A)=0,36$. $P(X=30)=B_{100;\,0,36}(X=30) \approx 0,0389$	1	
3.4.2	$E(X)=n \cdot p=100 \cdot 0,36=36$ $P(X<36)=B_{100;\,0,36}(X \leq 35) \approx 0,4624$	3	
3.5.1	Beim Untersuchen der vier Ausgewählten ändert sich die Wahrscheinlichkeit für eine Person mit Abitur in Abhängigkeit davon, ob die zuvor untersuchte Person Abitur hat oder nicht. Die einzelnen Bernoulliexperimente dieser Kette sind also nicht unabhängig voneinander. Bei einer Auswahl von 4 von 100 ist dieser Einfluss auch nicht vernachlässigbar klein.	2	
3.5.2	$p=\frac{60}{100} \cdot \frac{59}{99} \cdot \frac{58}{98} \cdot \frac{57}{97} \approx 0,1244$	2	
3.6	Damit die Wahrscheinlichkeit größer als 0% ist, müssen mehr als 20, also mindestens 21 Personen ausgewählt werden. Damit die Wahrscheinlichkeit kleiner als 10% ist, muss gelten: $P(X>20)=B_{n;\,0,36}(X \geq 21) \leq 0,1$. Man erhält $B_{45;\,0,36}(X \geq 21) \approx 0,0923$ und $B_{46;\,0,36}(X \geq 21) \approx 0,1141$. Man sieht, dass die Bedingung bis $n=45$ erfüllt und ab $n=46$ nicht mehr erfüllt ist. Es kommen also alle Werte von $n=21$ bis $n=45$ in Frage.	4	
	Summe:	**20**	