

Mecklenburg-Vorpommern



Zentralabitur 2021

Mathematik

Grundkurs

Prüfungsteil A – hilfsmittelfreie Aufgaben

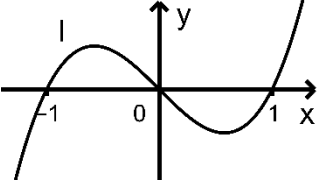
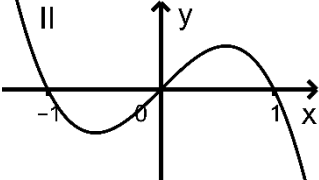
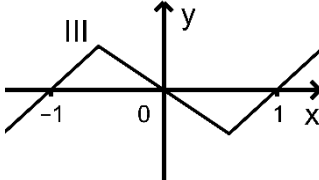
Name, Vorname: _____

Arbeitsblatt

Dieses Arbeitsblatt ist ohne Zuhilfenahme von Tafelwerk oder Taschenrechner zu bearbeiten. Zusätzliche Lösungsblätter sind mit Ihrem Namen zu versehen und in dieses Arbeitsblatt einzulegen.

Für dieses Arbeitsblatt beträgt die Bearbeitungszeit maximal 90 Minuten.

Zu bearbeiten sind die **vier** Pflichtaufgaben sowie **eine** der drei Wahlaufgaben.

1 Analysis – Pflichtaufgabe	BE
Gegeben ist die in \mathbb{R} definierte Funktion f mit $f(x) = x^3 - x$.	
<p>1.1 Einer der folgenden Graphen I, II und III stellt f dar. Geben Sie die Graphen an, die dafür nicht infrage kommen, und begründen Sie Ihre Angabe.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;">    </div>	2
<p>1.2 Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f und die x-Achse einschließen.</p>	3

2 Analysis – Pflichtaufgabe

BE

Die Abbildung 1 zeigt den Graphen einer in \mathbb{R} definierten Funktion f , die Abbildung 2 den Graphen einer Stammfunktion F von f .

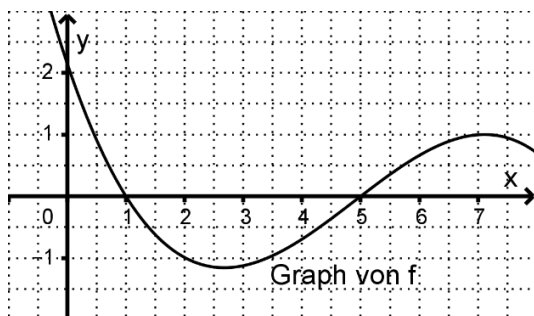


Abbildung 1

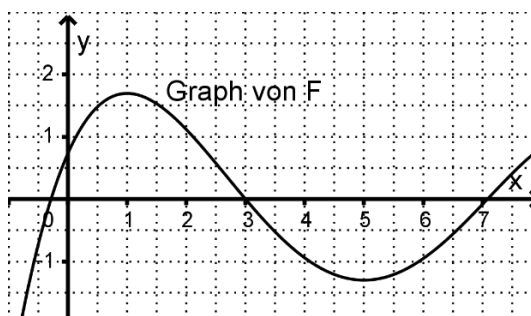


Abbildung 2

2.1 Bestimmen Sie ausschließlich mithilfe der Abbildung 2 den Wert des

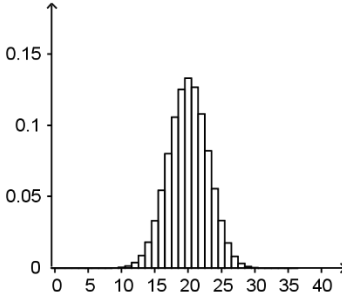
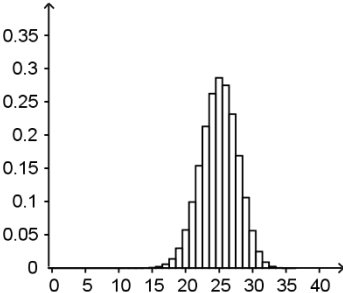
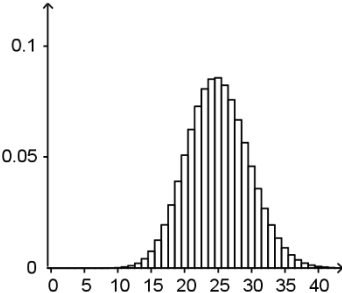
$$\text{Terms } \int_1^5 f(x) dx.$$

2

2.2 Beschreiben Sie, wie man den Wert des Terms $\int_1^5 f(x) dx$ ausschließlich mithilfe der Abbildung 1 bestimmen könnte.

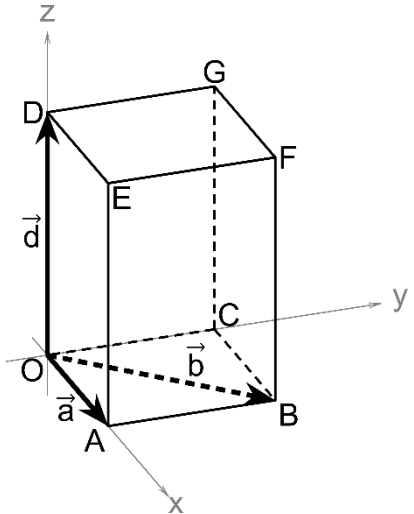
3

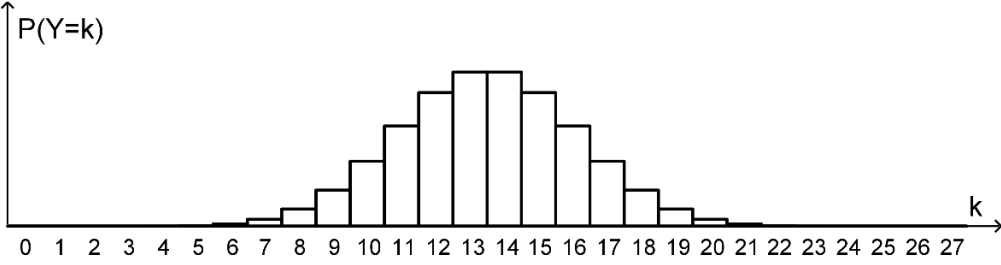
3 Analytische Geometrie – Pflichtaufgabe	BE
Gegeben sind die Punkte $A(5 0 a)$ und $B(2 4 5)$. Der Koordinatenursprung wird mit O bezeichnet.	
3.1 Bestimmen Sie denjenigen Wert von a , für den A und B den Abstand 5 haben.	3
3.2 Ermitteln Sie denjenigen Wert von a , für den das Dreieck OAB im Punkt B rechtwinklig ist.	2

<p>4 Stochastik – Pflichtaufgabe</p>	<p>BE</p>
<p>Im Folgenden werden zwei Würfel stets gemeinsam geworfen. Bei jedem der beiden Würfel sind die Seiten mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert.</p>	
<p>4.1 Die beiden Würfel werden einmal geworfen. Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei keine „6“ auftritt, $\frac{25}{36}$ beträgt.</p>	<p>2</p>
<p>4.2 Die beiden Würfel werden 36-mal geworfen. Die binomialverteilte Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Würfe an, bei denen keine „6“ auftritt. Begründen Sie für jede der folgenden Abbildungen, dass sie nicht die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X zeigt.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: flex-end;"> <div style="text-align: center;">  <p>Abbildung 1</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>Abbildung 2</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>Abbildung 3</p> </div> </div>	<p>3</p>

Von den folgenden drei Wahlaufgaben ist **eine** zu bearbeiten.

5 Analysis – Wahlaufgabe	BE
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -x^5 + 2x^3 + x$ und $x \in \mathbb{R}$. Ihr Graph heißt G . Begründen Sie, dass die folgenden Aussagen über f bzw. G wahr sind.	
5.1 G ist symmetrisch zum Koordinatenursprung.	1
5.2 f hat mindestens eine Nullstelle.	1
5.3 G besitzt mindestens einen lokalen Extrempunkt. <i>Hinweis: Eine rechnerische Bestimmung der Koordinaten ist nicht gefordert.</i>	3

6 Analytische Geometrie – Wahlaufgabe	BE
<p>Die Abbildung zeigt einen Quader sowie die Ortsvektoren der Eckpunkte A, B und D.</p> <p>Die Grundfläche OABC des Quaders ist quadratisch.</p>	
<p>6.1 Beschreiben Sie die Lage des Punkts, zu dem der Ortsvektor $\frac{1}{2} \cdot (\vec{b} - \vec{a})$ gehört.</p>	1
<p>Der Punkt P hat den Ortsvektor $\frac{1}{2} \cdot \vec{b} + \vec{d}$.</p>	
<p>6.2 Zeichnen Sie P in die Abbildung ein.</p>	1
<p>6.3 Begründen Sie, dass der Wert des Terms $\vec{b} \circ \overrightarrow{OP}$ nur von der Seitenlänge der Grundfläche abhängt.</p>	3

7	Stochastik – Wahlaufgabe	BE
7.1	<p>Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt; die Trefferwahrscheinlichkeit beträgt $\frac{1}{4}$.</p> <p>Vervollständigen Sie die folgende Gleichung zur Berechnung einer Wahrscheinlichkeit: $P\left(X = \quad\right) = \binom{\quad}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\quad\right)^2$</p>	2
7.2	<p>Die Abbildung zeigt die symmetrische Wahrscheinlichkeitsverteilung einer binomialverteilten Zufallsgröße Y.</p>  <p>Gegeben sind die Wahrscheinlichkeitswerte $P(Y \leq 15) \approx 0,78$ und $P(Y = 12) \approx 0,13$.</p> <p>Berechnen Sie unter Verwendung dieser Werte den zugehörigen Wert für die Wahrscheinlichkeit $P(Y = 14)$.</p>	3

Mecklenburg-Vorpommern



Zentralabitur 2021

Mathematik (CAS)

Grundkurs

Prüfungsteil B – komplexe Aufgaben

1 Analysis

Gegeben ist die in \mathbb{R} definierte Funktion f mit $f(x) = \left(2 + \frac{x}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right)^3$.

Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

1.1 Geben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen an. 2 BE

1.2 Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass G_f mindestens einen Hochpunkt hat. 3 BE

1.3 $W_1(2 \mid 0)$ ist ein Wendepunkt von G_f . 3 BE

Weisen Sie rechnerisch nach, dass auch $W_2\left(-1 \mid \frac{81}{16}\right)$ ein Wendepunkt von G_f ist und dass G_f keine weiteren Wendepunkte hat.

1.4 Die Gerade g verläuft durch W_1 und W_2 .

1.4.1 Stellen Sie G_f für $-4 \leq x \leq 4$ in einem Koordinatensystem dar. 4 BE

Zeichnen Sie g in dieses Koordinatensystem ein und weisen Sie nach, dass g durch die Gleichung $y = -\frac{27}{16}x + \frac{27}{8}$ dargestellt wird.

1.4.2 G_f und g schließen drei Flächenstücke ein. Zeigen Sie, dass die Summe der Inhalte zweier dieser Flächenstücke ebenso groß ist wie der Inhalt des dritten. 4 BE

1.4.3 Ermitteln Sie rechnerisch die Anzahl der Geraden, die parallel zu g sind und G_f berühren. 3 BE

1.5 Im Längsschnitt eines Berghangs kann dessen Profillinie für $-5 \leq x \leq 4$ modellhaft durch den Graphen der in \mathbb{R} definierten Funktion h mit $h(x) = \frac{1}{4} \cdot f\left(\frac{1}{2} \cdot x\right)$, d. h.

$h(x) = \frac{1}{1024} \cdot (8+x) \cdot (4-x)^3$, beschrieben werden. Es soll davon ausgegangen werden, dass der Hang in Querrichtung nicht geneigt ist. Im verwendeten Koordinatensystem beschreibt die x -Achse die Horizontale; eine Längeneinheit entspricht 100 Metern in der Wirklichkeit.

Der Aufgabentext wird auf der folgenden Seite fortgesetzt.

1.5.1 Der Hochpunkt des Graphen von h hat die x -Koordinate -5 . 2 BE
Geben Sie die zugehörige y -Koordinate an und stellen Sie die Profillinie des Hangs in einem Koordinatensystem grafisch dar.

1.5.2 Beschreiben Sie, wie der Graph von h aus dem Graphen von f erzeugt werden kann. 2 BE

1.5.3 Zeigen Sie rechnerisch, dass der Höhenunterschied zwischen dem höchsten und tiefsten Punkt des Hangs etwa 214 m beträgt. 4 BE
Ermitteln Sie das durchschnittliche Gefälle zwischen diesen beiden Punkten in Prozent.

1.5.4 Der Hang wird als Skipiste genutzt. Der Tabelle kann der Zusammenhang zwischen dem Schwierigkeitsgrad von Skipisten und deren jeweiligem maximalen Gefälle entnommen werden: 3 BE

Schwierigkeitsgrad	leicht	mittel	schwer
maximales Gefälle	bis 25 %	bis 40 %	mehr als 40 %

Ermitteln Sie den Schwierigkeitsgrad der hier betrachteten Piste.

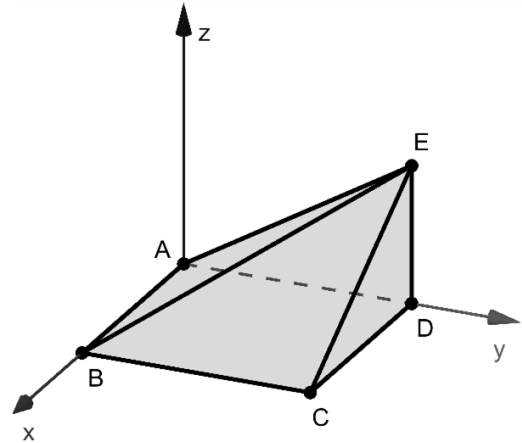
1.5.5 Am höchsten Punkt des Hangs steht ein Turm mit einer Höhe von 25 m. Es gibt zwei Abschnitte des Hangs, in denen der Turm vom Boden aus zumindest teilweise sichtbar ist. 5 BE
Ermitteln Sie die Lage des höher gelegenen der beiden Abschnitte.

2 Analytische Geometrie

Die Eckpunkte eines Holzkörpers werden durch $A(0|0|0)$, $B(10|0|0)$, $C(10|10|0)$, $D(0|10|0)$ und $E(0|10|6)$ dargestellt (vgl. Abbildung).

Die Punkte B, D und E liegen im Modell in der Symmetrieebene des Körpers.

Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Zentimeter in der Realität.



Hinweis: Zu dieser Aufgabe gehört das beiliegende Arbeitsblatt.

2.1 Zeigen Sie, dass das Dreieck BCE rechtwinklig ist, und berechnen Sie den Inhalt der Oberfläche des Holzkörpers. 5 BE

2.2 Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene L, in der das Dreieck BCE liegt, in Koordinatenform. 3 BE

2.3 Die quadratische Grundfläche des Holzkörpers schließt mit der Seitenfläche, die durch das Dreieck BCE dargestellt wird, einen Winkel ein. Berechnen Sie die Größe dieses Winkels. 2 BE

2.4 Der Holzkörper soll mit einer möglichst kurzen Linie versehen werden, die im Modell vom Eckpunkt A über die Kante \overline{BE} zum Punkt C verläuft. Die Länge dieser Linie in Zentimetern kann folgendermaßen ermittelt werden:

$$P(10 - 10t | 10t | 6t)$$

$$\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PB} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{25}{59}$$

$$2 \cdot |\overrightarrow{PC}| \approx 15,2$$

Erläutern Sie dieses Vorgehen.

2.5 Der Schnittpunkt der Ebene L mit der z-Achse wird mit F bezeichnet.

2.5.1 Zeichnen Sie F sowie die Geraden, in denen L die xz- und die yz-Ebene schneidet, in die Abbildung auf dem Arbeitsblatt ein. 2 BE

2.5.2 Ermitteln Sie, um wie viel Prozent das Volumen des Körpers ABCDEF größer ist als das Volumen des Körpers ABCDE, ohne für diese Volumina konkrete Werte zu berechnen. 4 BE

3 Stochastik

In einem Bundesland wird die Bevölkerungsgruppe derjenigen, die im Jahr 2000 geboren wurden, im Hinblick auf Schulabschlüsse untersucht. In dieser Bevölkerungsgruppe beträgt der Anteil der Personen mit Abitur 36 %. Unter den Personen mit Abitur sind 54 % weiblich. Der Anteil der nicht weiblichen Personen ohne Abitur in der gesamten Bevölkerungsgruppe beträgt 34 %.

- 3.1 Weisen Sie nach, dass unter allen Personen ohne Abitur der Anteil derjenigen, die nicht weiblich sind, etwa 53 % beträgt. 2 BE
- 3.2 Stellen Sie den Sachzusammenhang in einem beschrifteten Baumdiagramm dar. 3 BE
- 3.3 Zur betrachteten Bevölkerungsgruppe gehören 27 000 Personen. Ermitteln Sie, wie viele dieser Personen weiblich sind. 3 BE
- 3.4 Für eine Online-Befragung werden aus der betrachteten Bevölkerungsgruppe 100 Personen zufällig ausgewählt. Es soll davon ausgegangen werden, dass unter den ausgewählten Personen die Anzahl derjenigen mit Abitur binomialverteilt ist.
- 3.4.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den ausgewählten Personen 30 mit Abitur sind. 1 BE
- 3.4.2 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der ausgewählten Personen mit Abitur kleiner als der Erwartungswert dieser Anzahl ist. 3 BE
- 3.5 Unter den 100 Personen, die für die Online-Befragung ausgewählt wurden, befinden sich 40 mit Abitur. Von den 100 Personen werden vier zufällig ausgewählt.
- 3.5.1 Begründen Sie, dass die Anzahl der Personen mit Abitur unter den vier ausgewählten nicht binomialverteilt ist. 2 BE
- 3.5.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese vier Personen kein Abitur haben. 2 BE
- 3.6 Aus der gesamten Bevölkerungsgruppe derjenigen, die im Jahr 2000 geboren wurden, werden n Personen zufällig ausgewählt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich darunter mehr als 20 mit Abitur befinden, ist größer als 0 % und kleiner als 10 %. Ermitteln Sie alle Werte, die für n infrage kommen. 4 BE

Arbeitsblatt zur Aufgabe 2