

Mecklenburg-Vorpommern



Nachname, Vorname des Prüflings:

Musterabitur 2024

Mathematik (WTR)

Grundkurs

Prüfungsteil B - komplexe Aufgaben

Hinweise für den Prüfling

Aufgabenbearbeitung:

Der Prüfungsteil B beinhaltet eine Pflichtaufgabe (Aufgabe 1) und zwei Wahlaufgaben (Aufgaben 2 und 3). Bearbeiten Sie die Pflichtaufgabe und eine der Wahlaufgaben.

Sofern ein entsprechender Hinweis in einer Teilaufgabe gegeben wird, sollen graphische Darstellungen im vorliegenden Aufgabendokument angefertigt werden, andernfalls verwenden Sie bitte bereitgestelltes Papier bzw. Millimeterpapier.

Beginnen Sie die Bearbeitung dieses Prüfungsteils B mit dem Eintragen Ihres Namens und Ihres Vornamens auf dem Deckblatt. Geben Sie auf der Reinschrift Ihren Namen sowie die bearbeitete Wahlaufgabe an und nummerieren Sie die Seiten Ihrer Arbeit fortlaufend.

Bearbeitungszeit:

Die Bearbeitungszeit für die Prüfungsteile A und B beträgt einschließlich Auswahlzeit 255 Minuten.

Nach Abgabe des Prüfungsteils A steht Ihnen der verbleibende Zeitraum für die Bearbeitung dieses Prüfungsteils B zur Verfügung.

Hilfsmittel:

Folgende Hilfsmittel stehen zur Verfügung:

- ein an der Schule eingeführtes Tafelwerk,
- ein an der Schule zugelassener wissenschaftlicher Taschenrechner (WTR), der nicht programmierbar und nicht grafikfähig ist und nicht über Möglichkeiten der numerischen Differentiation oder Integration oder des automatischen Lösen von Gleichungen verfügt,
- Zeichengeräte,
- ein Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung in gedruckter oder digitaler Form,
- zweisprachiges Wörterbuch in gedruckter oder digitaler Form für Prüflinge mit nichtdeutscher Herkunftssprache.

Bewertung:

Die Lösungen sind in einer sprachlich korrekten, mathematisch exakten und äußerlich einwandfreien Form darzustellen. In der Niederschrift müssen die Lösungswege nachvollziehbar sein.

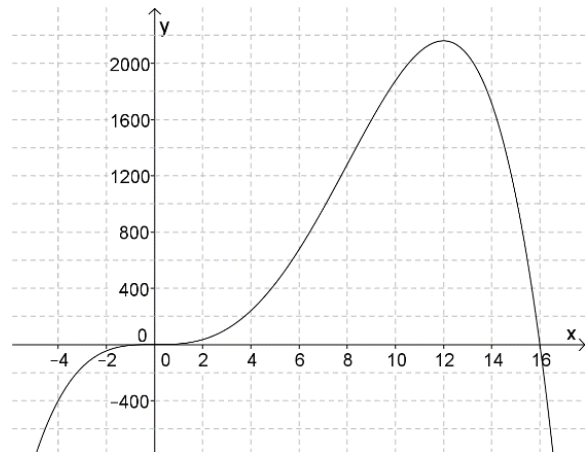
In der Aufgabe 1 zur Analysis sind 35 Bewertungseinheiten erreichbar, in den Aufgaben 2 (Analysis und Geometrie) und 3 (Geometrie) sind es jeweils 20 Bewertungseinheiten.

Maximal zwei Bewertungseinheiten können zusätzlich vergeben werden bei guter Notation und Darstellung sowie eleganten, kreativen und rationellen Lösungswegen.

Maximal zwei Bewertungseinheiten können bei mehrfachen Formverstößen abgezogen werden.

1 Pflichtaufgabe Analysis

Die Abbildung zeigt den Graphen der in \mathbb{R} definierten Funktion f .



7 BE

1.1 Die Funktion f ist eine ganzrationale Funktion 4. Grades der Form $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + d$.

Begründen Sie anhand der Abbildung, dass $d=0$ gelten muss.

Ermitteln Sie die Werte für a , b und c . Berücksichtigen Sie dazu die folgenden Eigenschaften des Graphen von f . Der Graph

- hat einen Wendepunkt bei $x = 0$,
- verläuft durch den Punkt $(2 | 35)$ und
- hat eine Steigung von 50 an der Stelle $x = 2$.

Zur Kontrolle: $f(x) = -\frac{5}{16}x^4 + 5x^3$

1.2 Zeigen Sie rechnerisch, dass der Punkt $(12 | 2160)$ ein Hochpunkt des Graphen von f ist und dass die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(0 | 0)$ parallel zur x -Achse verläuft.

5 BE

1.3 Für jede reelle Zahl a ist eine in \mathbb{R} definierte Funktion h_a mit $h_a(x) = 5ax^2$ gegeben.

1.3.1 Beschreiben Sie, wie der Graph von h_4 aus dem Graphen von h_3 erzeugt werden kann.

2 BE

1.3.2 Bestimmen Sie denjenigen Wert von a , für den der Punkt $(4 | f(4))$ auf dem Graphen von h_a liegt.

2 BE

1.3.3 Es gibt genau einen positiven Wert von a , für den die Graphen von f und h_a genau zwei gemeinsame Punkte haben. Ermitteln Sie diesen Wert von a .

5 BE

1.3.4 Die Gleichung $f(x) = h_{3,75}(x)$ hat genau die drei Lösungen $x_1 = 0$, $x_2 = 6$ und $x_3 = 10$

3 BE

und es gilt $\int_0^{10} (f(x) - h_{3,75}(x)) dx = 0$.

Deuten Sie dies mit Bezug auf die Graphen von f und $h_{3,75}$.

- 1.4 Ein Unternehmen lagert Glycerin in einem Tank. Die momentane Änderungsrate des Tankinhalts kann für $0 \leq x \leq 20$ mithilfe der Funktion f beschrieben werden. Dabei ist x die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $f(x)$ die momentane Änderungsrate in Kilogramm pro Stunde. Zu Beobachtungsbeginn befinden sich im Tank 1200 kg Glycerin.
- 1.4.1 Der Punkt $(4 | 240)$ liegt auf dem Graphen von f . Interpretieren Sie die Koordinaten dieses Punkts im Sachzusammenhang. 2 BE
- 1.4.2 Beurteilen Sie die folgende Aussage: 2 BE
Zwölf Stunden nach Beobachtungsbeginn ist die größte Menge Glycerin im Tank enthalten.
- 1.4.3 Bestimmen Sie graphisch die Zunahme des Tankinhalts zwischen den Zeitpunkten acht Stunden und zehn Stunden nach Beobachtungsbeginn. 3 BE
- 1.4.4 Berechnen Sie, wie viel Glycerin 20 Stunden nach Beobachtungsbeginn im Tank enthalten ist. 4 BE

Hinweis: Von den Wahlaufgaben 2 und 3 ist **eine** zu bearbeiten.

2 Wahlaufgabe Analysis und Analytische Geometrie

2.1 Die Abbildung 1 zeigt den Graph der Funktion f mit der Gleichung $f(x) = (-x^2 + x) \cdot e^x$ und $x \in \mathbb{R}$.

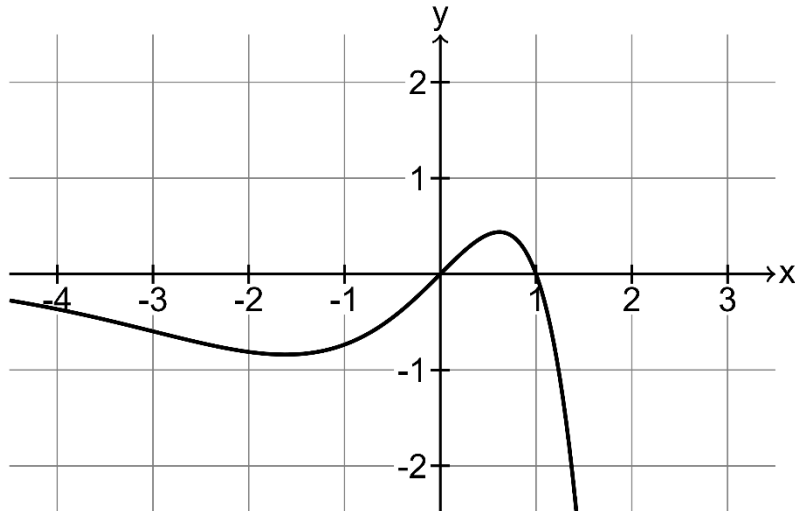


Abb. 1

Für die erste Ableitungsfunktion f' von f gilt $f'(x) = -e^x \cdot (x^2 + x - 1)$.

- 2.1.1 Geben Sie die Nullstellen von f an und berechnen Sie die Extremstellen von f . 3 BE
- 2.1.2 An den Graphen von f wird im Punkt $P(1|f(1))$ die Tangente t gelegt. 2 BE
Ermitteln Sie eine Gleichung von t .
- 2.1.3 Begründen Sie ohne zu rechnen, dass es eine negative Zahl a gibt, für die gilt: 3 BE

$$\int_a^1 f(x) dx = 0$$
- 2.1.4 Begründen Sie, dass der Graph jeder Stammfunktion von f einen Tiefpunkt hat. 2 BE

- 2.2 Das Modell eines Werbeschildes wird in einem Koordinatensystem dargestellt durch das Parallelogramm ABCD mit den Koordinaten $A(-2|3|5)$, $B(-2|7|5)$, $C(-2|7|8)$ und $D(-2|3|8)$ (Abbildung 2).

Das Werbeschild ist auf einem vertikal stehenden Rohr befestigt, das sich um seine Längsachse drehen lässt. Der Fußpunkt des Rohres ist im Modell der Punkt $E(-2|3|0)$. Der Durchmesser des Rohres wird vernachlässigt.

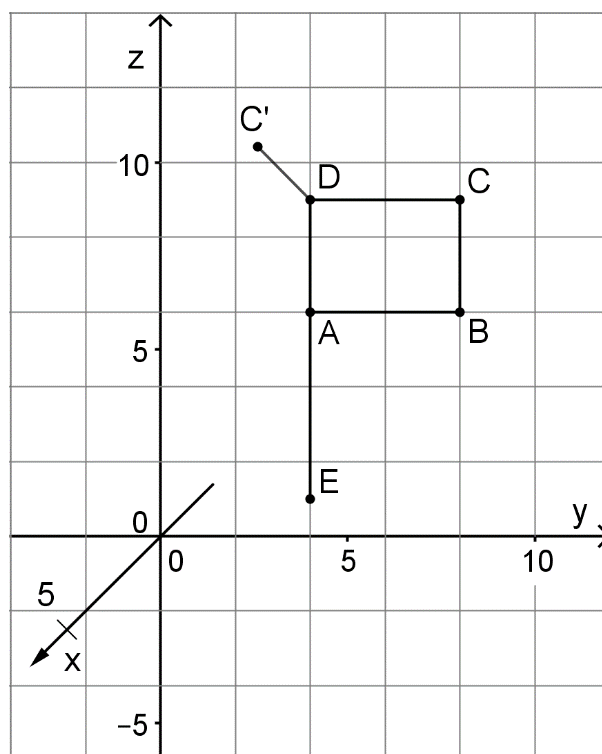


Abb. 2

- 2.2.1 Zeigen Sie, dass das Parallelogramm ABCD ein Rechteck ist.

2 BE

Das Werbeschild richtet sich stets in Windrichtung aus. Für eine Richtung des Windes, die durch den Vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ beschrieben wird, stellen die Punkte B' und C' die veränderte Lage der Punkte B und C im Modell dar.

- 2.2.2 Der Punkt C' sowie die Strecke $\overline{DC'}$ sind in der Abbildung 2 bereits eingezeichnet. Ergänzen Sie in dieser Abbildung den Punkt B' und die Darstellung des gedrehten Werbeschildes.

1 BE

- 2.2.3 Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes C' .

5 BE

- 2.2.4 Für jeden Wert von a mit $a \in \mathbb{R}$ wird durch den Vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Windrichtung beschrieben. Im Modell wird der Punkt C dadurch auf die Punkte C'_a abgebildet.

2 BE

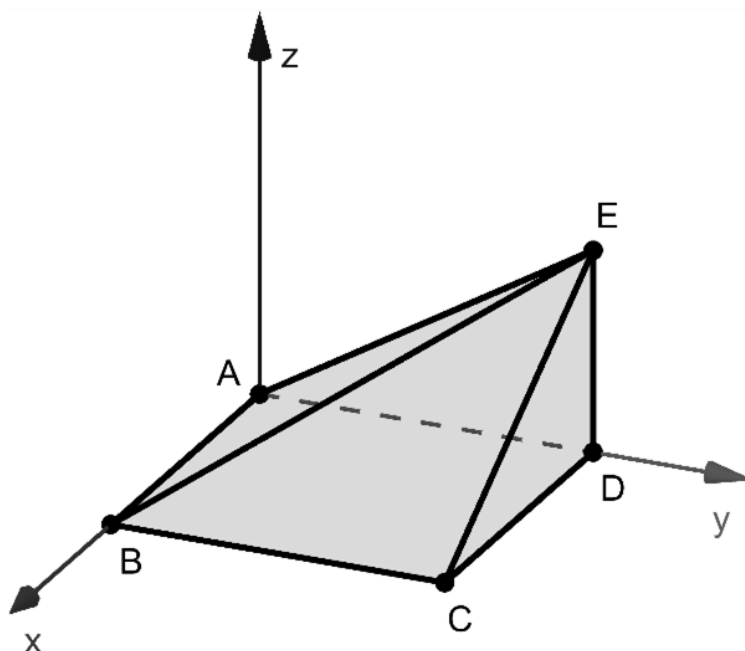
Alle Punkte C'_a liegen in der Ebene $z = 8$.

Beschreiben Sie die Lage der Punkte C'_a in dieser Ebene.

3 Wahlaufgabe Analytische Geometrie

Die Eckpunkte eines Holzkörpers werden durch $A(0|0|0)$, $B(10|0|0)$, $C(10|10|0)$, $D(0|10|0)$ und $E(0|10|6)$ dargestellt (vgl. Abbildung). Die Punkte B, D und E liegen im Modell in der Symmetrieebene des Körpers.

Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Zentimeter in der Realität.



- 3.1 Zeigen Sie, dass das Dreieck BCE rechtwinklig ist, und berechnen Sie den Inhalt der Oberfläche des Holzkörpers. 5 BE
- 3.2 Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene L, in der das Dreieck BCE liegt, in Koordinatenform. 3 BE
- 3.3 Die quadratische Grundfläche des Holzkörpers schließt mit der Seitenfläche, die durch das Dreieck BCE dargestellt wird, einen Winkel ein. Berechnen Sie die Größe dieses Winkels. 2 BE

- 3.4 Der Holzkörper soll mit einer möglichst kurzen Linie versehen werden, die im Modell vom Eckpunkt A über die Kante \overline{BE} zum Punkt C verläuft. Die Länge dieser Linie in Zentimetern kann folgendermaßen ermittelt werden: 4 BE

$$P(10 - 10t | 10t | 6t)$$

$$\overrightarrow{PC} \circ \overrightarrow{PB} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{25}{59}$$

$$2 \cdot |\overrightarrow{PC}| \approx 15,2$$

Erläutern Sie dieses Vorgehen.

- 3.5 Der Schnittpunkt der Ebene L mit der z-Achse wird mit F bezeichnet.
- 3.5.1 Zeichnen Sie F sowie die Geraden, in denen L die xz- und die yz-Ebene schneidet, in die Abbildung ein. 2 BE
- 3.5.2 Ermitteln Sie, um wie viel Prozent das Volumen des Körpers ABCDEF größer ist als das Volumen des Körpers ABCDE, ohne für diese Volumina konkrete Werte zu berechnen. 4 BE