

Mecklenburg-Vorpommern



Nachname, Vorname des Prüflings:

Musterprüfung zur Fachhochschulreife 2024

Mathematik

Anforderungsniveau

Prüfungsteil B – komplexe Aufgaben

Hinweise für den Prüfling

- Aufgabenbearbeitung:** Tragen Sie auf dem Deckblatt in das dafür vorgesehene Feld Ihren Nachnamen und Vornamen ein.
- Der Prüfungsteil B beinhaltet 2 Pflichtaufgaben aus dem Sachgebiet Analysis und drei Wahlaufgaben, davon 2 Aufgaben aus der Analysis und 1 aus der Stochastik. Zu bearbeiten sind die zwei Pflichtaufgaben sowie zwei der drei Wahlaufgaben.
- Bearbeitungszeit:** Die Arbeitszeit für den Prüfungsteil B beträgt einschließlich Auswahlzeit 175 Minuten.
- Hilfsmittel:** Folgende Hilfsmittel stehen im Prüfungsteil B zur Verfügung:
- an der Schule eingeführtes Tafelwerk,
 - an der Schule eingeführter, nicht grafikfähiger wissenschaftlicher Taschenrechner ohne CAS,
 - Zeichengeräte,
 - ein Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung in gedruckter oder digitaler Form,
 - zweisprachiges Wörterbuch in gedruckter oder digitaler Form für Prüflinge mit nichtdeutscher Herkunftssprache.
- Bewertung:** Im Prüfungsteil B sind in den Pflichtaufgaben 20 bzw. 15 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, in den Wahlaufgaben sind es jeweils 15 BE.
- Die Lösungen sind in einer sprachlich korrekten, mathematisch exakten und äußerlich einwandfreien Form darzustellen. In der Niederschrift müssen die Lösungswege nachvollziehbar sein.
- Bearbeitet ein Prüfungsteilnehmer drei Wahlaufgaben, werden die Aufgaben gewertet, welche die höchsten Bewertungseinheiten erbringen.
- Maximal zwei Bewertungseinheiten können zusätzlich vergeben werden bei guter Notation und Darstellung, bei eleganten, kreativen und rationellen Lösungswegen sowie bei vollständiger Lösung einer zusätzlichen Wahlaufgabe. Maximal zwei Bewertungseinheiten können bei mehrfachen Formverstößen abgezogen werden.

1 Analysis - Pflichtaufgabe

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x$ ($x \in \mathbb{R}$).
 Der Graph von f ist K . In der Abbildung ist K dargestellt.

1.1 Begründen Sie mithilfe der Funktionsgleichung, dass K durch den Koordinatenursprung verläuft. 1 BE

1.2 Eine Gerade schneidet K in den Punkten $A\left(-2 \mid -\frac{2}{3}\right)$ und $B\left(3 \mid -\frac{3}{2}\right)$. 6 BE
 Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Wendepunkt von K auf dieser Gerade liegt.

1.3 Die Tangenten t_1 und t_2 an K liegen parallel zur Gerade h mit der Gleichung $h(x) = -\frac{1}{6}x - 1$.

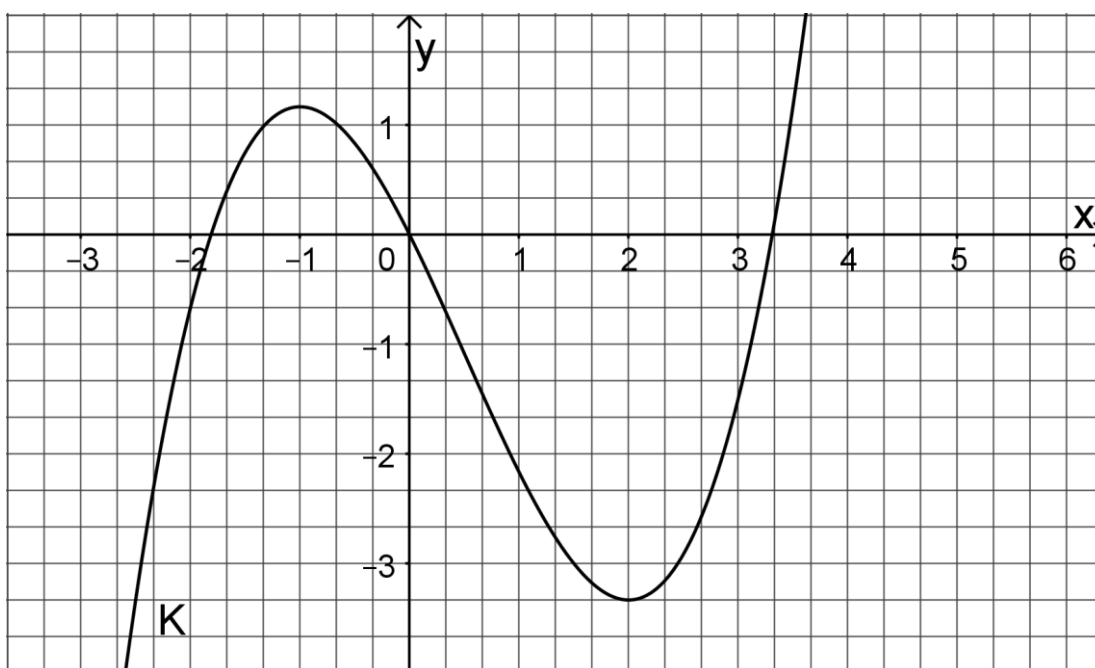
1.3.1 Berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels von h mit der x -Achse. 2 BE

1.3.2 Berechnen Sie die Stellen, an denen t_1 und t_2 jeweils K berühren. 3 BE

1.4 Die Gerade h , die Gerade m mit der Gleichung $m(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{3}$ und K schließen im IV. Quadranten eine Fläche ein.

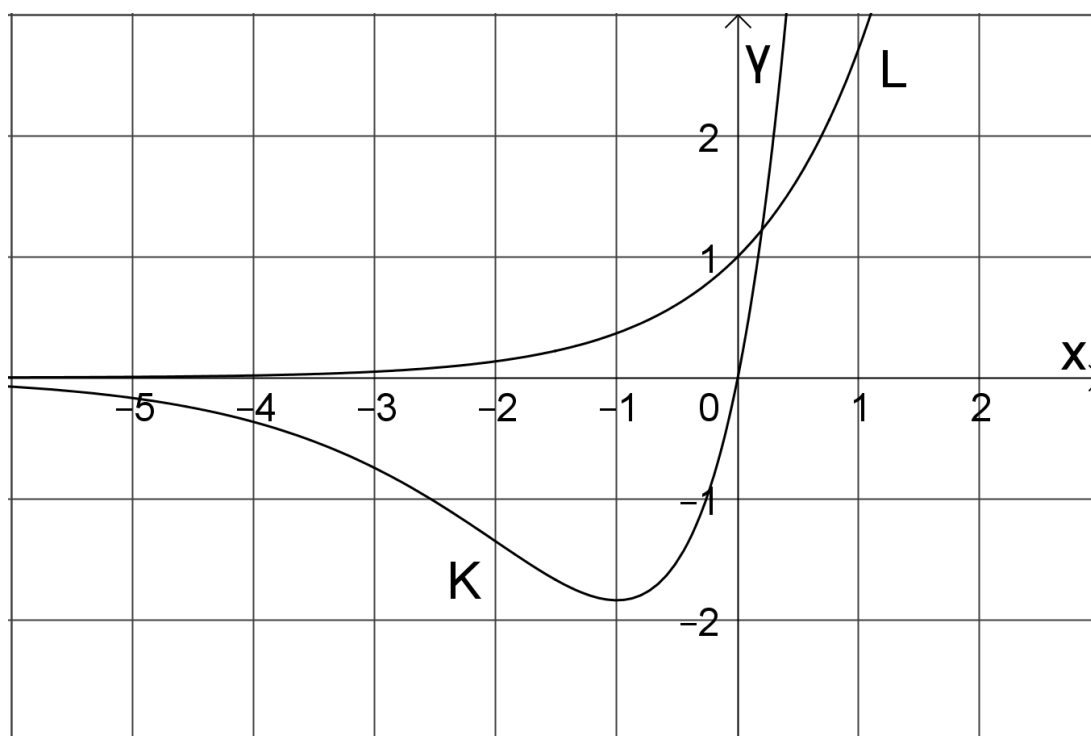
1.4.1 Stellen Sie die beschriebene Fläche in der Abbildung graphisch dar. Ergänzen Sie dazu notwendige Eintragungen. 3 BE

1.4.2 Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche. 5 BE



2 Analysis - Pflichtaufgabe

Gegeben sind die in \mathbb{R} definierten Funktionen f und g mit den Gleichungen $f(x) = 5x \cdot e^x$ und $g(x) = e^x$. Der Graph von f ist K und L ist der Graph von g (siehe Abbildung).



2.1 Weisen Sie nach, dass $f'(x) = 5(x + 1) \cdot e^x$ die Gleichung der 1. Ableitungsfunktion von f ist. 4 BE

Der einzige Extrempunkt von K ist ein Tiefpunkt. Berechnen Sie dessen Koordinaten.

2.2 Zeigen Sie, dass K und L nur einen gemeinsamen Punkt haben. 2 BE

2.3 Im Koordinatensprung wird die Normale n an K gelegt. Die y -Achse und n schließen mit der Gerade $y = 1$ ein Dreieck ein. Zeichnen Sie dieses Dreieck in die Abbildung ein. Berechnen Sie den Umfang des Dreiecks. 5 BE

2.4 Beurteilen Sie, ob folgende Aussage wahr ist. 4 BE

$$\text{Für alle reellen Werte } u \text{ mit } u \leq -1 \text{ gilt: } f'(u) < g'(u)$$

3 Analysis - Wahlaufgabe

Eine Entwässerungsrinne soll neu entwickelt werden. Zur Anschauung ist in der Abbildung 1 ein ähnliches Produkt dargestellt.

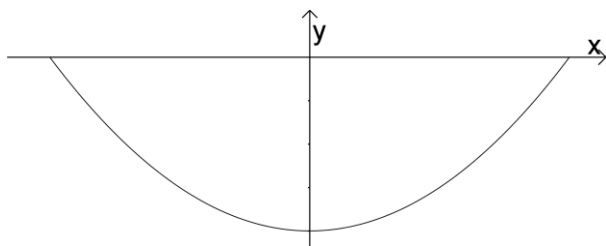


Abbildung 1

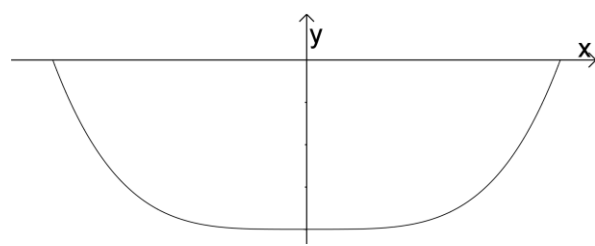
Im Modell werden zur Beschreibung der inneren Randlinie der neu zu entwickelnden Entwässerungsrinne zwei Entwürfe vorgelegt (siehe Abbildung 2). Die ebene Abdeckung wird im Modell jeweils durch die x -Achse dargestellt. Eine Längeneinheit im Modell entspricht einem Zentimeter in der Realität.

Entwurf 1: Die innere Randlinie wird mit Hilfe des Graphen der quadratischen Funktion $f(x) = \frac{1}{9}x^2 - 4$ beschrieben.

Entwurf 2: Die innere Randlinie wird mit Hilfe des Graphen der Funktion $g(x) = ax^4 - 4$ und einer reellen Zahl a beschrieben.



Entwurf 1



Entwurf 2

- 3.1 Die maximale Breite der Entwässerungsrinne soll im Inneren 12 cm betragen. 4 BE
 Zeigen Sie, dass der Entwurf 1 diese Vorgabe einhält und berechnen Sie den Wert a aus der Funktion g , damit diese Vorgabe auch vom Entwurf 2 eingehalten wird.
- 3.2 Berechnen Sie für den Entwurf 1 das maximale Fassungsvermögen eines 1 m langen Teilstücks einer solchen Entwässerungsrinne in Liter. 4 BE

Der Aufgabentext wird auf der folgenden Seite fortgesetzt.

3.3 Im Zuge der Neuentwicklung wurde die folgende Berechnung durchgeführt. 5 BE

I. $d(u) = f(u) - g(u) = -\frac{1}{324}u^4 + \frac{1}{9}u^2$

II. $d'(u) = -\frac{1}{81}u^3 + \frac{2}{9}u$, $d''(u) = -\frac{1}{27}u^2 + \frac{2}{9}$

III. $d'(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0 \vee u = \pm 3\sqrt{2}$

IV. $d''(3\sqrt{2}) < 0$, $d(3\sqrt{2}) = 1$

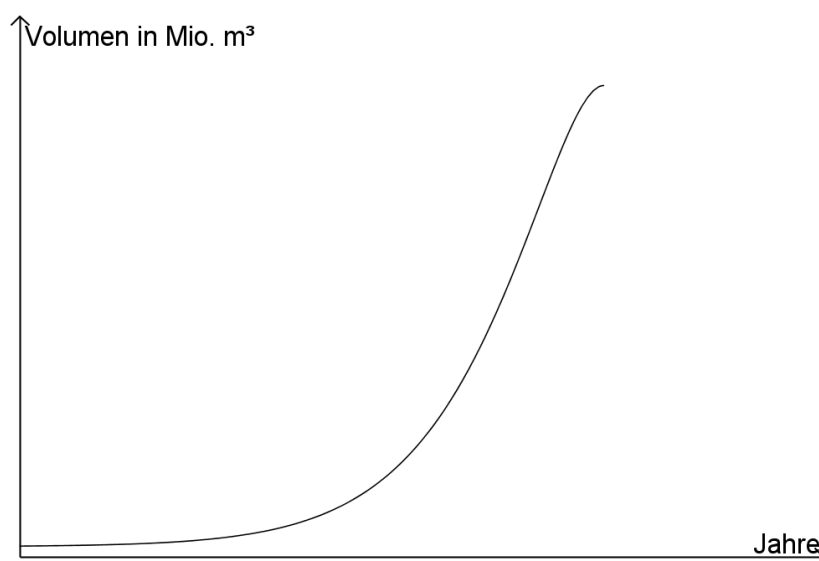
Formulieren Sie im Sachzusammenhang eine dazu geeignete Aufgabenstellung und veranschaulichen Sie diesen Sachzusammenhang graphisch.

3.4 Begründen Sie, dass zur Beschreibung der inneren Randlinie der neu zu entwickelnden Entwässerungsrinne keine der Funktionen h_b mit der Gleichung 2 BE

$h_b(x) = bx^3 - 4$, $b \in \mathbb{R}^+$ infrage kommt.

4 Analysis - Wahlaufgabe

In den Wäldern Deutschlands hat in den vergangenen Jahren der Schadhholzeinschlag aufgrund von Insektenbefall stark zugenommen. Ausgehend von dem jährlich zu einem Stichtag ermittelten Volumen dieses geschlagenen Schadhholzes kann für den Zeitraum von 2011 bis 2020 dessen Volumen näherungsweise mithilfe der Funktion f mit $f(x) = \left(-\frac{1}{190}x + \frac{1}{19}\right) \cdot e^x + 1$ modelliert werden. Dabei ist $f(x)$ das Volumen dieses Schadhholzes in Millionen Kubikmeter und x die seit Messbeginn im Jahr 2011 vergangene Zeit in Jahren (siehe Abbildung).



- 4.1 Berechnen Sie das Volumen des aufgrund von Insektenbefall geschlagenen Schadhholzes jeweils für das Jahr 2014 und das Jahr 2018 nach diesem Modell. 2 BE
- 4.2 Weisen Sie rechnerisch nach, dass dieses Modell für die Beschreibung des durch Insektenbefall verursachten Holzeinschlags im Jahr 2022 nicht geeignet ist. 2 BE
- 4.3 Ermitteln Sie die Koordinaten des Extrempunktes des Graphen von f und begründen Sie, dass f kein weiteres Extremum besitzt. 6 BE
- 4.4 Für jeden reellen Wert von x mit $0 \leq x \leq 9$ gilt $f'(8) > f'(x)$ mit $x \neq 8$. 2 BE
Beschreiben Sie die besondere Bedeutung der Stelle $x = 8$ im Sachzusammenhang.
- 4.5 Ermitteln Sie den Wert des Terms $\int_7^9 f'(x) dx$ und deuten Sie diesen Wert im Sachzusammenhang. 3 BE

5 Stochastik - Wahlaufgabe

In einem Produktionsbetrieb werden Rohre mit Gewinde, sogenannte Rohrnippel, hergestellt.

Bei der Herstellung kann ein Gewindefehler (G) und ein Längenfehler (L) auftreten. Andere Fehler treten nicht auf. 6 % aller Rohre weisen einen Gewindefehler auf, von denen haben 8 % auch einen Längenfehler. Unter allen Rohrnippeln haben 4,7 % keinen Gewindefehler, aber einen Längenfehler.



- 5.1 Weisen Sie nach, dass unter den Rohren, die keinen Gewindefehler aufweisen, 5 % einen Längenfehler haben. 2 BE

- 5.2 Stellen Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm dar. 2 BE

- 5.3 Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Zufallsexperiment, bei dem die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit dem Term $(1 - 0,06 \cdot 0,08)^{10}$ berechnet werden kann. Geben Sie dieses Ereignis an. 3 BE

- 5.4 Ein zufällig der laufenden Produktion entnommener Rohrnippel hat einen Längenfehler. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieser Rohrnippel einen Gewindefehler hat. 3 BE

- 5.5 Für den Längenzuschnitt der Rohrnippel soll eine neue Maschine gekauft werden. Es stehen zwei Maschinen A und B zur Auswahl, die beim Lieferanten getestet werden. Ein Test für den Zuschnitt von jeweils 1 Meter langen Rohren mit beiden Maschinen ergab folgende Daten. 5 BE

Messung Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Maschine A Länge in m	1,001	1,004	1,001	0,999	0,997	0,995	0,998	1,000	1,005
Maschine B Länge in m	1,002	0,999	0,995	1,005	1,002	0,998	0,997	1,005	0,997

Entscheiden Sie mithilfe geeigneter statistischer Kenngrößen, welche Maschine gewählt werden sollte. Begründen Sie Ihre Entscheidung.